

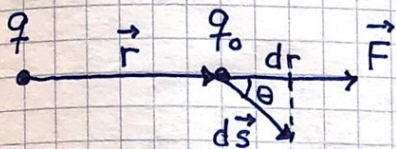
Potensiell energi og elektrisk potensial

(54)

[OS2 7.1-7.2; YF 23.1-23.2; LHL 19.9, 20.3]

Coulombkraften er, som gravitasjonskraften, konservativ.

Pot. energi for ladningspar q og q_0 :



$$\begin{aligned}dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\&= -F \cdot dr = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\&= \text{endring i pot. energi n\u00e5r} \\&\text{avstand mellom } q \text{ og } q_0 \text{ endres} \\&\text{fra } r \text{ til } r+dr\end{aligned}$$

Vi velger $U=0$ n\u00e5r $r \rightarrow \infty$:

$$U(r) = -\int_{\infty}^r \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{pot. energi for}$$

Ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pot. energi pr ladningsenhet}$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{potensialet som } q$$

omgir seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

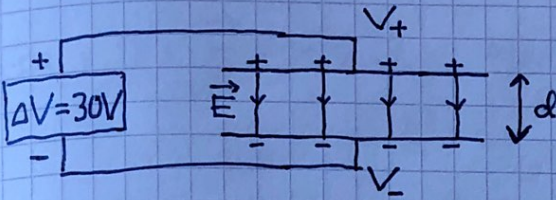
Enhet: $[V] = V$ (volt)

$\Rightarrow [E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)

Energienhet p\u00e5 atom\u00e5rt niv\u00e5:

$$1 \text{ eV (elektronvolt)} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Eks 1: Platekondensator, plateradius 10 cm,
plateavstand 1.0 mm



Beregn feltstyrken E mellom
platene og ladningen $\pm Q$
på platene

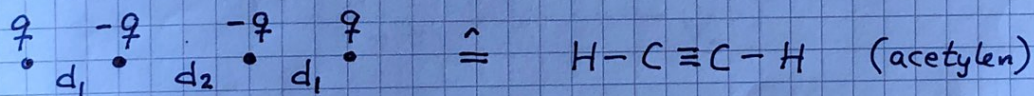
$$\text{Løsning 1: } \Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d$$

$$\Rightarrow E = \Delta V / d = 30 \text{ V} / 10^{-3} \text{ m} = \underline{30 \text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 \Rightarrow Q = \sigma A = \epsilon_0 E \pi R^2 = \underline{8.3 \text{ nC}}$$

Merk: \vec{E} har retning fra pos. mot neg. ladning,
og fra høyt mot lavt potensial

Eks 2: Pot. energi U for flere punktladninger



Anta $q = 0.41 e$, $d_1 = 106.0 \text{ pm}$ og $d_2 = 120.3 \text{ pm}$ (klassisk
punktladningsmodell for C_2H_2), samt at alle ladningspar
bidrar med $U_{ij} = q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}$ til total pot. energi U .

Beregn U i enheten eV.

Løsning 2: Antall unike ladningspar med N punktladninger er

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2}$$

Her er $N=4$, og de 6 unike ladningsparene har innbyrdes
avstander d_1 (2 par), d_2 (1 par), d_1+d_2 (2 par) og $2d_1+d_2$ (1 par).

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{2}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{2}{d_1+d_2} + \frac{1}{2d_1+d_2} \right\} \\ &= -6.3455 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \underline{-4.0 \text{ eV}} \end{aligned}$$

Beregning av \vec{E} fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9]

(56)

Fra s.18: $\vec{F} = -\nabla U$. Med $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$ får vi

$$\vec{E} = -\nabla V$$

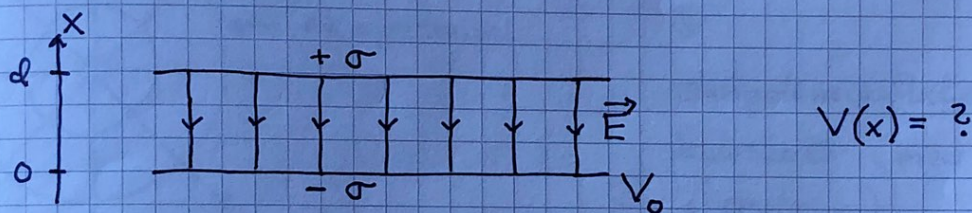
$$V = V(x) \Rightarrow \nabla V = \hat{x} dV/dx \quad (\text{tilsv. for } V(y) \text{ og } V(z))$$

$$V = V(r) \Rightarrow \nabla V = \hat{r} dV/dr$$

Eks 1: Punktladning (i origo)

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} \frac{dV}{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (\text{OK})$$

Eks 2: Platekondensator



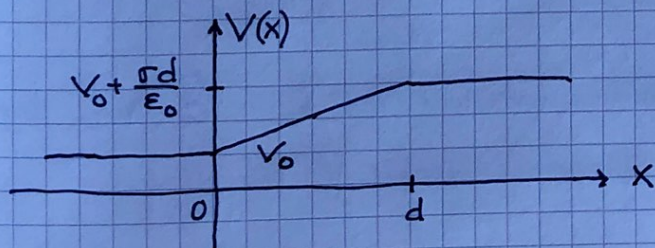
Løsn: Fra før har vi $\vec{E} = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$ mellom platene og $E = 0$ utenfor. Siden $\vec{E} = -\hat{x} dV/dx$, må vi ha $V(x) = \text{konstant}$ utenfor platene og

$$V(x) = \sigma x/\epsilon_0 + V(0) = \sigma x/\epsilon_0 + V_0 \quad \text{mellom platene}$$

$V(x)$ må videre være kontinuerlig, slik at

$$V(x) = V_0 \quad \text{for } x \leq 0 \quad \text{og}$$

$$V(x) = V_0 + \sigma d/\epsilon_0 \quad \text{for } x \geq d$$



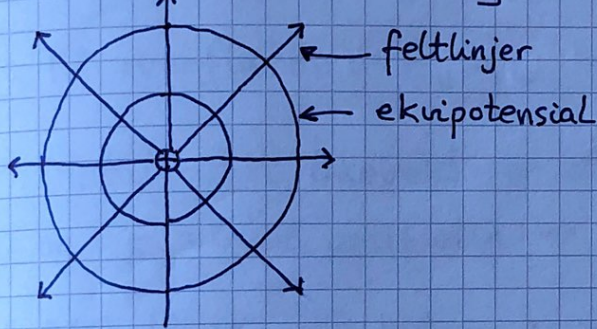
Ekvipotensialer [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

Et ekvipotensial er et område (linje, flate eller volum) der potensialet er konstant.

La $d\vec{s}$ være en liten forflytning på en ekvipotensialflate, slik at $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$.

Vi innser da at $\vec{E} \perp d\vec{s}$, dvs \vec{E} står normalt på en ekvipotensialflate.

Eks 1 : Punktladning

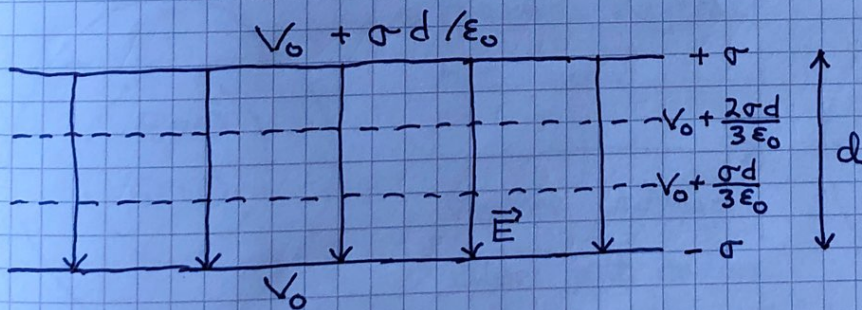


\vec{E} har retning radielt

⇓

ekvipotensialflatene er kuleskall (med ladningen i sentrum)

Eks 2: Platekondensator



uniformt felt $\vec{E} \Rightarrow$ ekvipotensialflatene er plan normalt på \vec{E}

Materialers elektriske egenskaper

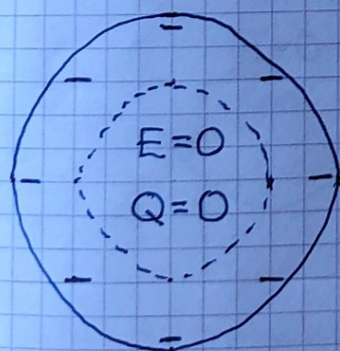
(58)

Ledere (Metaller) [OS2 7.5 (6.4); YF 22.5; LHL 19.8]

Har frie elektroner, typisk 1 eller 2 pr atom. Disse frie ladningene vil settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$, pga N2: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$. Dermed, for et metall i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inni et metall.
- All nettoladning ligger på overflaten.
- På overflaten: $E_{\parallel} = 0$, $E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ($\sigma = Q/A$)
- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial: $E = 0$ inni og $E_{\parallel} = 0$ på overflaten $\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ for alle $d\vec{s}$
- Metallbit med hulrom: $E = 0$ i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

Bevis:

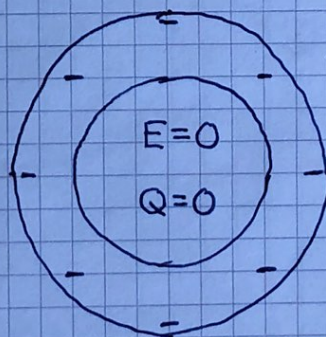


Kompakt metallbit

Fjerner nøytral bit inni.

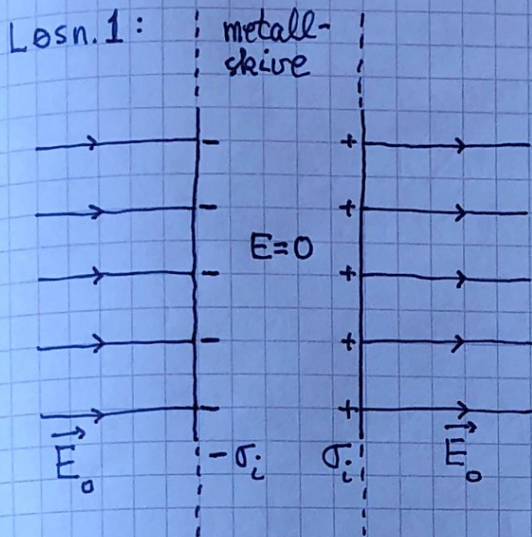


Verken ladning eller felt endres.



Metallbit med hulrom

Eks 1: Bestem industert overflateledning $\pm \sigma_i$ på ei metallskive i et uniformt ytre felt $E_0 = 1.0 \text{ kV/m}$.



Ytre felt: \vec{E}_0

Felt pga $\pm \sigma_i$: \vec{E}_i

$$E_i = \begin{cases} \sigma_i / \epsilon_0 & \text{inni skiva} \\ 0 & \text{utenfor} \end{cases}$$

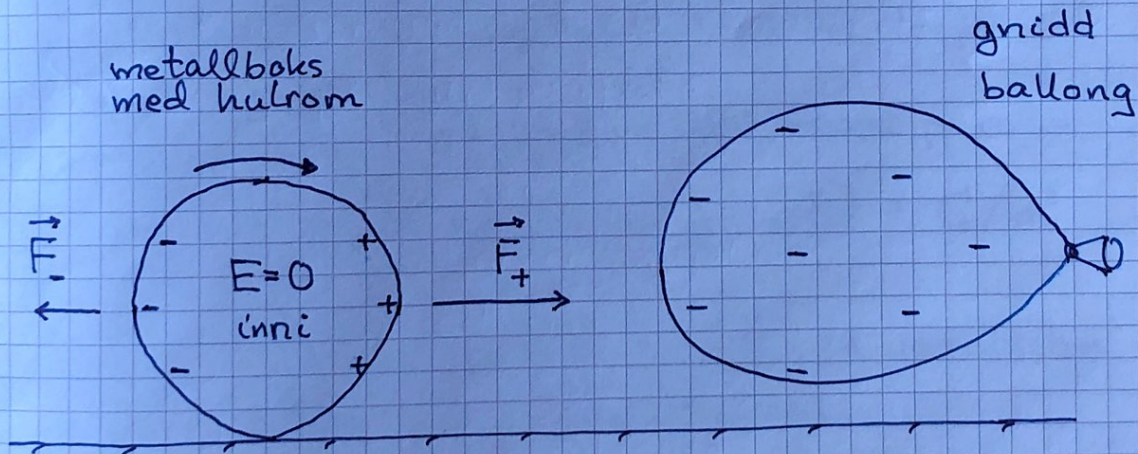
Totalt felt inni skiva:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$$

$$\Rightarrow E_i = E_0$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \epsilon_0 E_0 = \underline{8.85 \text{ nC/m}^2}$$

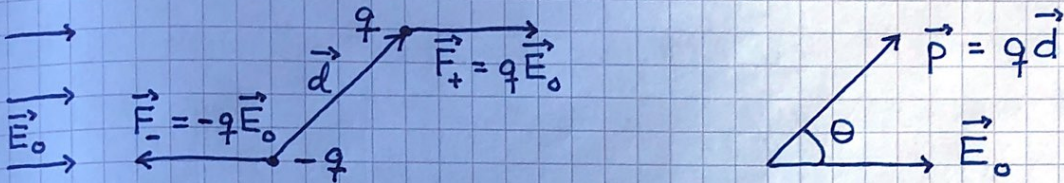
Eks 2: Faraday bur



Netto tiltrekning pga kortest avstand mellom ballongens negative ladning og boksens positive ladning.

Isolator (Dielektrikum) [OS2 8.5; YF 24.4-24.5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner. Har bundet ladning som gir polarisering i et ytre felt \vec{E}_0 . Ser på molekylær dipol:



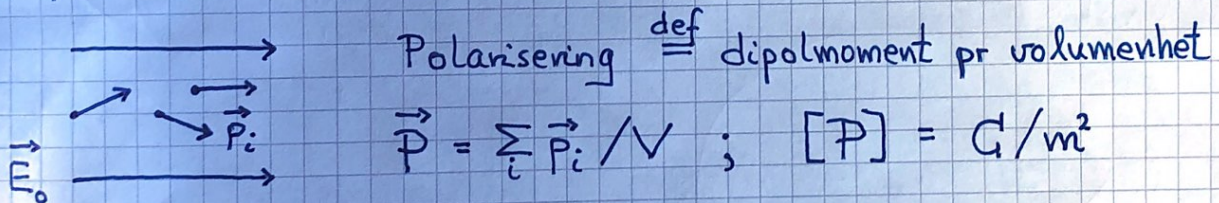
Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$; inn i planet

$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0|$$

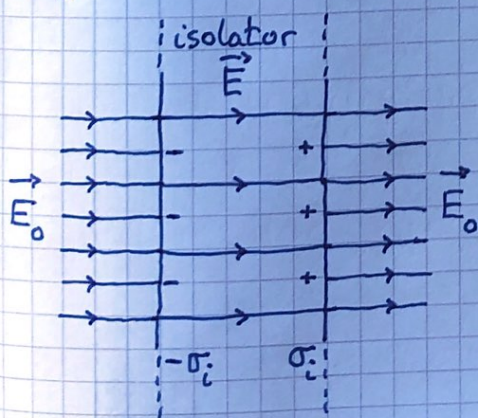
Dipolens pot. energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$

Oppsummert: $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$; $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$

Isolatorens molekylære dipoler orienterer seg med dipolmomentet \vec{p} i samme retning som det ytre feltet \vec{E}_0 :



Nettoeffekt: Indusert ladning $\pm\sigma_i$ på overflaten og dermed et svekket felt inni isolatoren.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$E = E_0 - E_i < E_0$$

Lineær respons:

E_i prop. med E_0

$$\Rightarrow E \text{ --- } E_0$$

Isolatorens relative permittivitet:

$$\epsilon_r = E_0 / E \Rightarrow E = E_0 / \epsilon_r$$

	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

(61)

Isolatorens permittivitet : $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Eks 1: Hva er feltstyrken i avstand 1.0 mm fra et ion med ladning $+2e$ inni en isolator med $\epsilon_r = 5.7$?

Løsning 1: $E = E_0 / \epsilon_r = Q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2 = Q / 4\pi \epsilon r^2$
 $= \{ 9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / 5.7 \cdot 10^{-6} \} \text{ V/m} = \underline{0.51 \text{ mV/m}}$

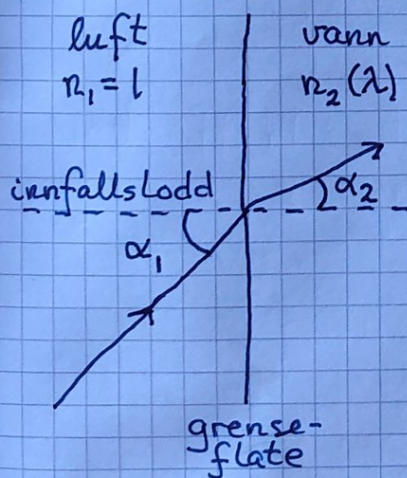
Eks 2: Hva er farten til synlig lys i vann ?

Løsning 2: $v = c/n$, der $n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)}$ er brytningsindeksen.

For synlig lys, $\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$, er $n \approx 1.3$ for vann (dvs $\epsilon_r \approx 1.7$) slik at $v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} / 1.3 \approx \underline{2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$.

Eks 3: Hvordan oppstår regnbuen ?

Løsning 3: En lysstråle endrer retning (brytes) når den passerer en grenseflate mellom to dielektrika med ulik brytningsindeks. Snells lov: $n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2$



$$\Rightarrow \alpha_2(\lambda) = \arcsin \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{n_2(\lambda)} \right\}$$

λ (nm)	n_2	farge
400	1.345	fiolett
450	1.341	blå (← indigo)
525	1.337	grønn
575	1.335	gul
600	1.334	oransje
700	1.331	rød

