

- Referansegruppe

Navn

Brukernavn på
stud.ntnu.no

MTK3

MTMT

BK3

MTMART

MTMASKIN

MTINGGEO

MTGEORT

- Ernneside

web.phys.ntnu.no/~stouneng/TFY4104_2024/efy4104.htm

- Labsider

home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslabNB: Info om Lab i R7 fredag 23/8 kl 10¹⁵

- Hovedtema

Mekanikk

Elektromagnetisme

- Hovedbok

openstax.org University Physics Volume 1 og 2

MEKANIKK

②

Størrelser og enheter [OS1 1]

Eks: Lengde, spydkast, Markus Rooth, OL 2024

$L = 6687 \text{ cm}$ ← SI-enhet (m = meter)
symbol tallverdi dekadisk forstavelse (c = centi = 10^{-2})

Notasjon: $[L] = \text{m}$ ("enhet for lengde er meter")

Grunnenheter i SI-systemet:

meter	(m ; lengde)	} mekanikk
kilogram	(kg ; masse)	
sekund	(s ; tid)	
ampere	(A ; strømstyrke)	elmag
kelvin	(K ; temperatur)	} termodynamikk
mol	(mol ; stoffmengde)	
candela	(cd ; lysstyrke)	

Siden 20.mai 2019 fastlagt med utgangspunkt i eksakt definerte verdier for naturkonstantene

lysfarten i vakuum	$c = 299792458 \text{ m/s}$
elementarladningen	$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Plancks konstant	$h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmanns konstant	$k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Sammensatte enheter:

Hastighet, fart $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon $[a] = \text{m/s}^2$

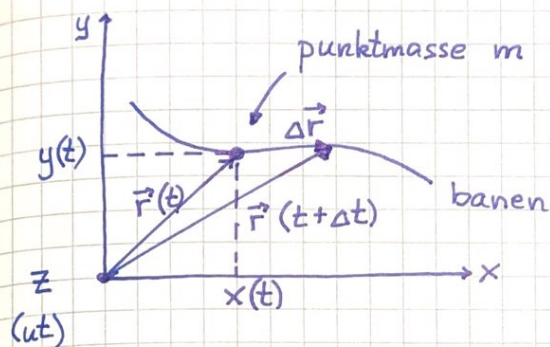
Avledete enheter:

Kraft $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Kinematikk (Bevegelse)

[OS1 (2) 3, 4]

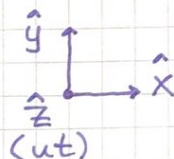
③



Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$



$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z} \quad (\text{osv. med høyrehåndsregel})$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = a \cdot b \cdot \cos \theta ; \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



$$\text{Forflytning i løpet av } \Delta t: \Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Forflytning pr tidsenhet}$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \quad \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}, \text{ dvs tangent til banen}$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Hastighetsendring pr tidsenhet}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \quad \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad \text{med } v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \text{med } a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

$\vec{r}$ og $\vec{v}$ er integraler av hhv $\vec{v}$ og $\vec{a}$:

(4)

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

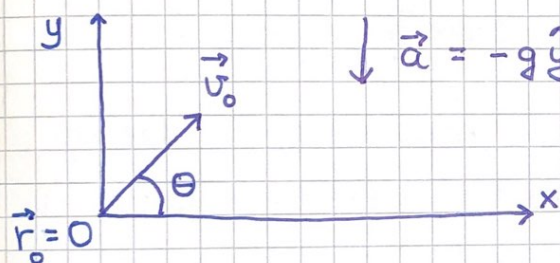
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant, og med $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2}$$

Eks: Skrått kast



$$\downarrow \vec{a} = -g \hat{y} \quad ; \quad g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

Bestem $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{y} \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$\text{dvs } x(t) = v_0 t \cos \theta \quad ; \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2$$

$$t = x / v_0 \cos \theta$$

$$\Rightarrow y(x) = x \tan \theta - x^2 g / 2 v_0^2 \cos^2 \theta \quad ; \quad \text{parabel}$$

Kastets lengde: Lander i $y=0$, dvs $\tan \theta = xg / 2 v_0^2 \cos^2 \theta$

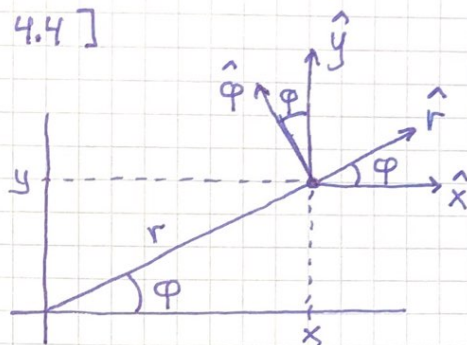
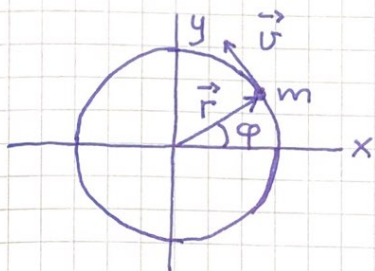
$$\text{dvs } x = (v_0^2 / g) \sin 2\theta$$

som er maksimal for $\theta = 45^\circ$

Sirkelbevegelse

[OS1 4.4]

⑤



Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; $\varphi > 0$ mot klokka

Fra figur:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde/radius}$

$$d\varphi = ds/r; \quad [\varphi] = 1 \text{ evt rad}$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidseenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = 1/s \text{ evt rad/s}$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{vinkelfartsendring pr tidseenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}; \quad [\alpha] = 1/s^2 \text{ evt rad/s}^2$$

Fra figur: $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$; $\vec{v} \perp \vec{r}$

Med liten (infinitesimal) dt og $d\varphi$:

$$|d\vec{r}| = dr = ds = r d\varphi$$

$$\Rightarrow v = dr/dt = r d\varphi/dt = r\omega$$

Dvs:

$$\boxed{\vec{v} = r\omega \hat{\varphi}}$$

Akselerasjon :

⑥

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos\varphi + \hat{y} r \sin\varphi$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos\varphi \quad [\text{kjernerregel}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= -\hat{x} r \ddot{\varphi} \cos\varphi - \hat{y} r \ddot{\varphi} \sin\varphi \\ &\quad -\hat{x} r \dot{\varphi}^2 \sin\varphi + \hat{y} r \dot{\varphi}^2 \cos\varphi \quad \left. \vphantom{\vec{a} = \dot{\vec{v}}} \right\} [\text{kjernerregel og produktregel}] \\ &= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Sentripetalakselerasjon: $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$; retning inn mot sirkelens sentrum.

Baneakselerasjon: $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$; retning tangentielt med sirkelbanen. Hvis ω og v er konstante, har vi uniform sirkelbevegelse med $a_{\parallel} = 0$.

Andre sentrale størrelser:

periode $\stackrel{\text{def}}{=}$ tid pr omløp

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega ; \quad [T] = s$$

frekvens $\stackrel{\text{def}}{=}$ antall omløp pr tidsenhet

$$f = 1/T = \omega/2\pi ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz (hertz)}$$

Eks: [TFY4125 17/8-2024]

Karusell med $\omega(t) = \omega_0^3 t^2 \exp(-\omega_0 t/3)$; $\omega_0 = 0.30 \text{ rad/s}$

a) Hva er ω ved $t = 20 \text{ s}$?

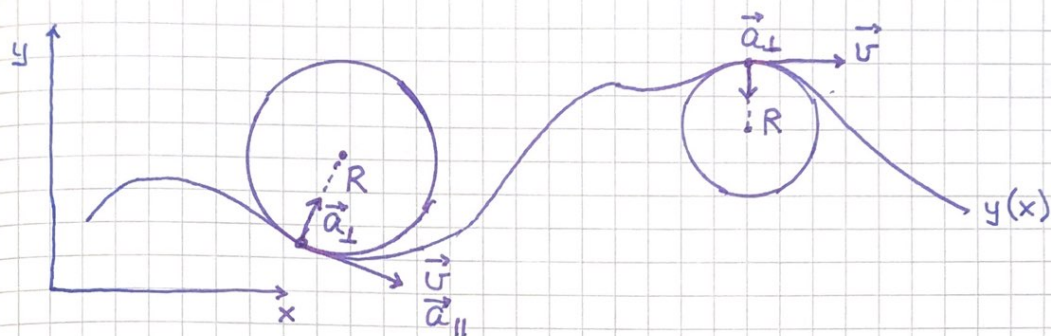
$$\omega(20) = 0.30 \text{ rad/s} \cdot 6.0^2 \exp(-2.0) = \underline{\underline{1.46 \text{ rad/s}}}$$

b) Hva er $\dot{\omega}$ ved $t = 20 \text{ s}$?

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \omega_0^3 \cdot 2t \cdot \exp(-\omega_0 t/3) + \omega_0^3 t^2 \exp(-\omega_0 t/3) \cdot (-\omega_0/3) \\ &= \omega_0^3 t \exp(-\omega_0 t/3) [2 - \omega_0 t/3] = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

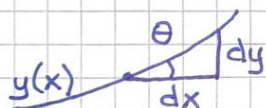
Krum bane :

⑦



banens krumningsradius $R = [1 + (y')^2] / |y''|$ er radien i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$; $y' = dy/dx$; $y'' = d^2y/dx^2$ (se notater 2019 s.10-11 for utledning)

- $a_{\perp} = v^2/R$ inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter
- $y'' = 0$ i vendepunkter (og for rett bane)
- banens helningsvinkel :



$$dy/dx = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan(dy/dx)$$

Eks: $y(x) = y_0 - x + x^2/y_0$; $y_0 = 100 \text{ cm}$

Hva er helningsvinkelen ved $x = 100 \text{ cm}$?

Løsn: $dy/dx = -1 + 2x/y_0 = 1$ når $x = 100 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \theta = \arctan 1 = \underline{\underline{45^\circ}}$$

Newtons lover [OS1 5, 6]

(8)

$m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1 : $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : Krefter er vekselvirkninger mellom legemer. Når legeme 1 virker med kraft $\vec{F}_{12}$ på legeme 2, virker nr 2 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ på nr 1.

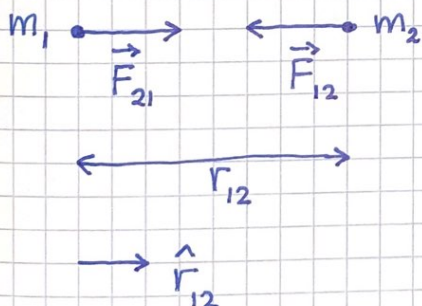
Enhet: $[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

Impuls (bevegelsesmengde): $\vec{p} = m\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$

Fundamentale naturkrefter [OS1 13.1 ; OS2 5.3]

Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser.



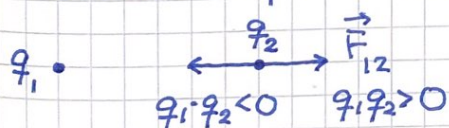
Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$$

Coulombkraft: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Enhet for ladning:

$$[q] = C \text{ (coulomb)}$$

Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Vakuumpermittiviteten:

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N m}^2$$

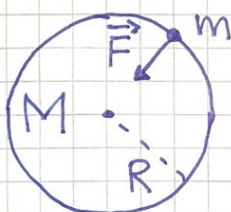
⑨

[Kjernekrefter : Svake og sterke krefter med kort rekkevidde.
Årsak til radioaktivitet og stabilitet av atomkjerner.]

Viktigst i mekanikken :

- Tyngdekraften fra jorda; evt. andre himmellegemer
- Kontaktkrefter; normalkraft og friksjonskraft.
(Begge disse er coulombkrefter.)

Tyngde [OS1 13.2 ; 5.4]



$$F = GMm/R^2 = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg ; } R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F = mg ; g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da $a=g$

Satellittbaner (sirkulære) :

$$a = v^2/r \Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r \Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

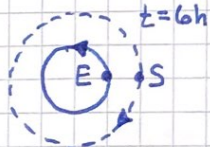
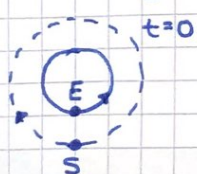
Eks :

a) Geostasjonære baner : Over ekvator med $T = 24 \text{ h}$

$$(2\pi r/T)^2 r = GM \Rightarrow r = \{GMT^2/4\pi^2\}^{1/3} = 4.22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = r - R \approx 36000 \text{ km ; } v = \sqrt{GM/r} \approx 3 \text{ km/s}$$

b) [TFY 4125 17/8 - 2024] Satellitt over samme sted
ved ekvator hver 6. time ; motsatt omløpsretning av jorda.
Beregn radien i satellittens bane.



$$\text{Dvs, } T = 8 \text{ h} \Rightarrow \underline{r = 2.03 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

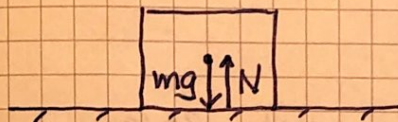
Kontaktkrefter

[OS1 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

(10)

Normalkraften N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer

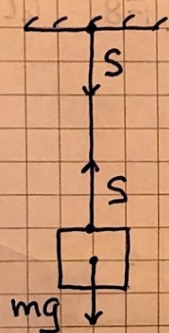
Eks:



Hvis kloss i ro: $N = mg$ (pga N1)

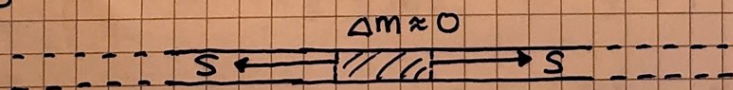
Snorkraft: S = kraft fra snora på det den er festet til

Eks:

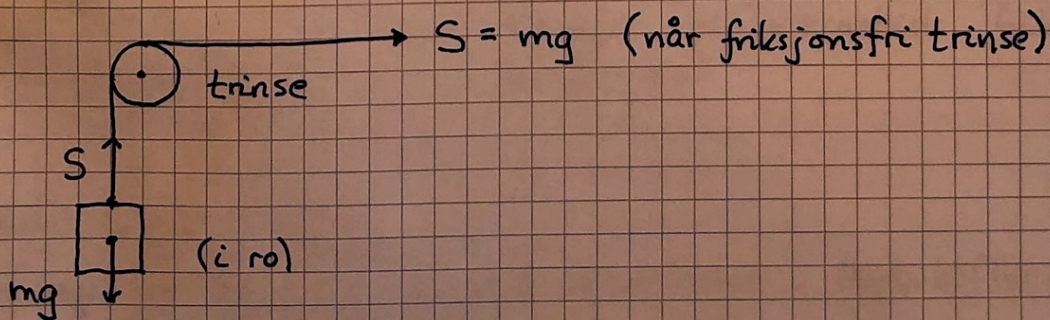


Kloss i ro gir $S = mg$ (N1)

Lette og utstrekte snorer har konstant snordrag S :

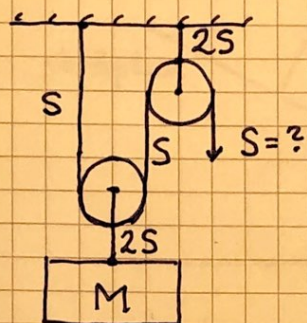


Trinser endrer retningen på $\vec{S}$:



Taljer gjør deg sterk:

(11)



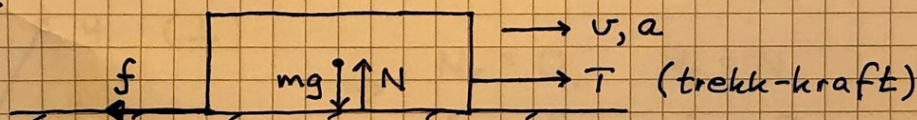
N1 for kassa: $2S = Mg$

$\Rightarrow$ Løfter kassa med
kraften $S = \frac{1}{2}Mg$

Fraksjon [OS1 6.2]

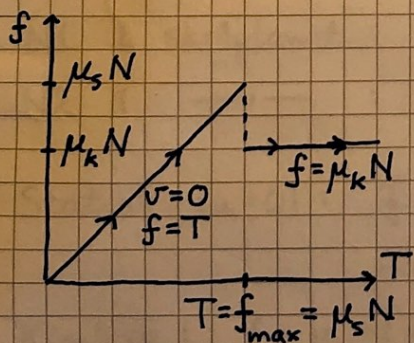
f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer
 $\vec{f}$ er rettet mot legemenes relative bevegelse

Eks:



N1 $\perp$ bordet $\Rightarrow N = mg$

N2 $\parallel$ ——— $\Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$



Statisk fraksjon: Kloss i ro, $f = T$,
 $f_{\max} = \mu_s N$, μ_s = statisk fraksjons-
koeffisient

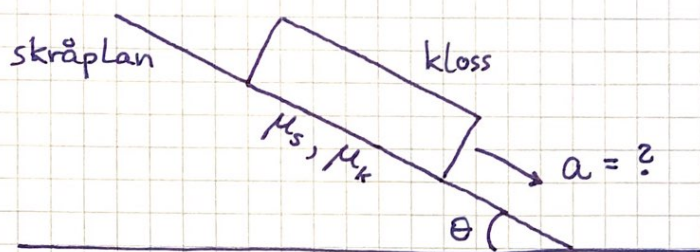
Kinetisk fraksjon: Klossen glir,
 $f = \mu_k N$, μ_k = kinetisk fraksjons-
koeffisient

Enhet: $[\mu] = 1$

Som regel er $\mu_s > \mu_k$: små ujevnheter i kontaktflatene
gir best "grep" når $v = 0$

Eks; inkl. generell løsningsstrategi:

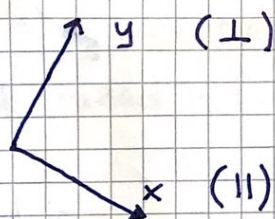
12



- Finn ytre krefter og tegn frtt-legeme-diagram



- Velg hensiktsmessig koordinatsystem og dekomponér



$$\Rightarrow \begin{aligned} N_x &= 0, & N_y &= N \\ f_x &= f, & f_y &= 0 \\ G_x &= mg \sin \theta, & G_y &= mg \cos \theta \end{aligned}$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene

N1 $\perp$ skråplanet: $N = mg \cos \theta$

N2 $\parallel$ — " — : $mg \sin \theta - f = ma$

Statisk ($a=0$): $f = mg \sin \theta \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$

Bare mulig hvis $\tan \theta \leq \mu_s$

Kinetisk: $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow \underline{a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$

Måling av μ_s :

Øker θ inntil klossen begynner å gli, ved vinkelen $\theta_{\max}$;

da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



omgivende fluid (gass eller væske) med
masse tetthet ρ og dynamisk viskositet μ

Luft: $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$; $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Vann: $\rho = 1000$; $\mu = 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$

Liten $v \Rightarrow$ Pen, lagdelt (laminær) strømming av fluidet
rundt legemet, og $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$. Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$
(Stokes' Lov)

Stor $v \Rightarrow$ Uordnet (turbulent) strømming av fluidet, og

$$\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}; \text{ her er}$$

C_d = drag-koeffisienten, stort sett bestemt av legemets form

A = legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$

Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Eks [TFY4125 17/8-24]: To like store kompakte kuler,
en av aluminium (2.70 g/cm^3) og en av jern (7.86 g/cm^3),
faller mot bakken med konstante hastigheter, såkalt
terminalfart v_t . Anta turbulente forhold og beregn $v_t(\text{Fe})/v_t(\text{Al})$

Løsn: N1 gir $f = mg$, med $f = \alpha \cdot v_t^2$ ($\alpha = \rho_{\text{luft}} A C_d / 2$)

og $m = \rho_{\text{metall}} V$. Dermed: $v_t^2 = \rho_{\text{metall}} V g / \alpha$, dvs

$$\begin{aligned} v_t(\text{Fe}) / v_t(\text{Al}) &= \sqrt{\rho(\text{Fe}) / \rho(\text{Al})} \\ &= \sqrt{7.86 / 2.70} \\ &= \underline{\underline{1.71}} \end{aligned}$$

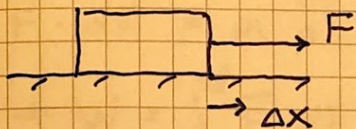
Arbeid og energi

[OS1 7, 8]

(14)

Arbeid [OS1 7.1]

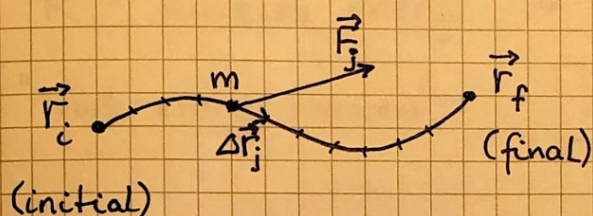
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\cdot$ forflytning



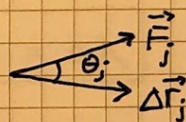
$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \Delta r_j \cos \theta_j$$



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m når m flytter seg fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

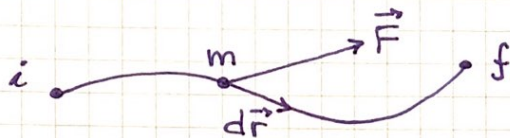
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ utført arbeid (overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \text{ (watt)}$$

Kinetisk energi [os1 7.2]

(15)



$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \cdot \frac{1}{2} d(v^2)$$

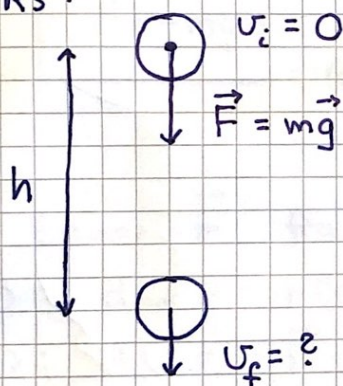
$$\Rightarrow W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \int_i^f d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

"Work-energy theorem":

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Eks:



Løsn:

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$$

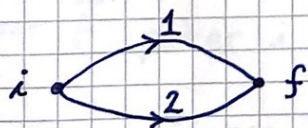
$$\Rightarrow \underline{v_f = \sqrt{2gh}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [os1 8.1-8.4]

$\vec{F}$ er konservativ hvis

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

↑ integral rundt lukket bane



$$W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Dvs: Arbeidet utført av konservative krefter er uavhengig av veien fra i til f

Forskjellen i potensiell energi U :

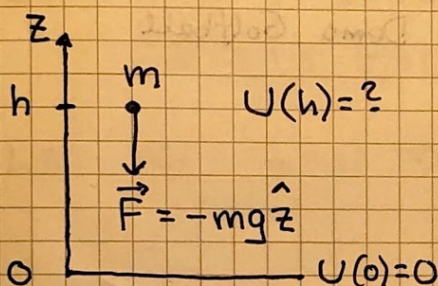
(16)

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{når } \vec{F} \text{ er konservativ})$$

Vi velger fr tt hvor $U=0$; bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning. Anta $U(\vec{r}_0) = 0$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks: Masse i tyngdefeltet



$$\begin{aligned} U(h) &= - \int_0^h F dz \\ &= - \int_0^h (-mg) dz \\ &= \underline{\underline{mgh}} \end{aligned}$$

Vi finner $\vec{F}$ fra U ved derivasjon:

$$1D: dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -dU/dx$$

$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradient til U :

$$\nabla U = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} U = \text{vektor i retningen som } U \text{  ker raskest}$$

$\Rightarrow \vec{F}$ peker i retningen som U avtar raskest

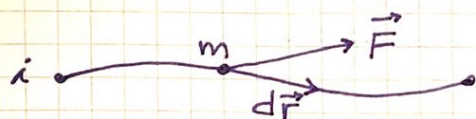
Eks: Masse i tyngdefeltet, $U(z) = mgz$, beregn $\vec{F}$

$$\text{L sn: } \partial U / \partial x = \partial U / \partial y = 0; \quad \partial U / \partial z = mg$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -mg\hat{z}; \quad \text{OK}$$

Energibevarelse [OS1 8.3]

(17)



(konservativ $\vec{F}$)

$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$
$$\Rightarrow \Delta(K+U) = \Delta E = 0$$

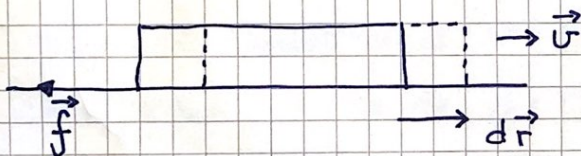
Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

Eks: Masse m slippes i tyngdefeltet.

Anta $z_i = h$, $u_i = 0$, $z_f = 0$ og beregn u_f

Løsn: $K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i \Rightarrow \frac{1}{2} m u_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{u_f = \sqrt{2gh}}$; ok

Friksjonsarbeid [OS1 7.1]



Kinetisk friksjon gir $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ fordi $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning. Da er $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ og $\vec{f}$ er ikke konservativ. Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi etc.

Statisk friksjon gir ikke tap av mekanisk energi fordi relativ forflytning er $d\vec{r} = 0$.

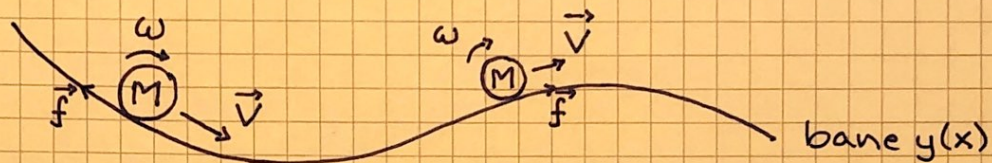
Eks: Hvor langt glir klossen hvis $\mu_k = 0.26$ og $u_0 = 10 \text{ m/s}$?

Løsn: $W_f = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$; $K_0 = \frac{1}{2} m u_0^2$

$$\Rightarrow s = u_0^2 / 2\mu_k g \approx 100/5 \text{ m} = \underline{20 \text{ m}}$$

Labprosjektet: Kule på berg-og-dal-bane

(18)



Kula ruller uten å gli $\Rightarrow$ statisk friksjon $\vec{f}$

$\Rightarrow$ mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U = Mgy$

Translasjonsenergi: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} MV^2$

Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

Tregghetsmoment for kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Rullebetingelsen: $\omega = V/R$

$\Rightarrow K_{\text{rot}} = \frac{1}{5} MV^2$

Total kinetisk energi: $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{7}{10} MV^2$

Dermed, med fart $V=0$ i høyde y , blir farten til kula i høyde $y=0$

$$V = \sqrt{\frac{10}{7} gy}$$

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

(19)

Massesenter [OS1 9.6]

N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{total masse}$$

Ekse [TFY 4125 21/5 - 24]: 6 punktmasser i xy-planet,
 m i $x=y=-3a$, $2m$ i $x=y=-2a$, $3m$ i $x=y=-a$,
 $4m$ i $x=y=a$, $5m$ i $x=y=2a$, $6m$ i $x=y=3a$.

Hva er avstanden fra origo til massesenteret?

Løsning:

$$\begin{aligned} X_{CM} = Y_{CM} &= \frac{1}{21m} \{-3ma - 4ma - 3ma + 4ma + 10ma + 18ma\} \\ &= 22a/21 \Rightarrow R_{CM} = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{2} \cdot 22a/21 = \underline{\underline{1.48a}} \end{aligned}$$

Kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i \cdot m_i \rightarrow \vec{r} dm \quad ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm$$

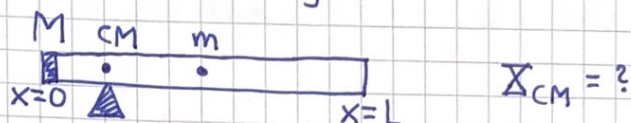
$$dm = \text{masseelement} = \begin{cases} \lambda \cdot dl & (1D) \\ \sigma \cdot dA & (2D) \\ \rho \cdot dV & (3D) \end{cases}$$

λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet
 dl, dA, dV = hhv lengde-, flate-, volumelement

Hvis uniform massefordeling:

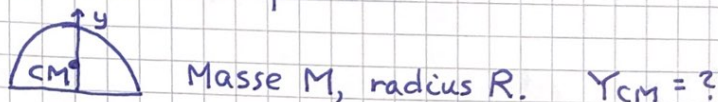
$$dm = \frac{M}{L} dl \quad (1D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{A} dA \quad (2D) \quad ; \quad dm = \frac{M}{V} dV \quad (3D)$$

Eks 1: Plastrør ($m=165\text{ g}$) med lodd i enden ($M=305\text{ g}$) (20)

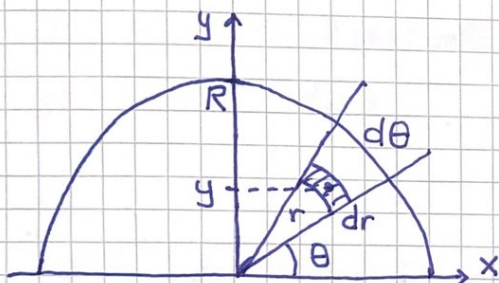


Løsn 1:
$$X = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 2: Halv sirkulær plate



Løsn 2:



$$dA = r d\theta \cdot dr ; \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2$$

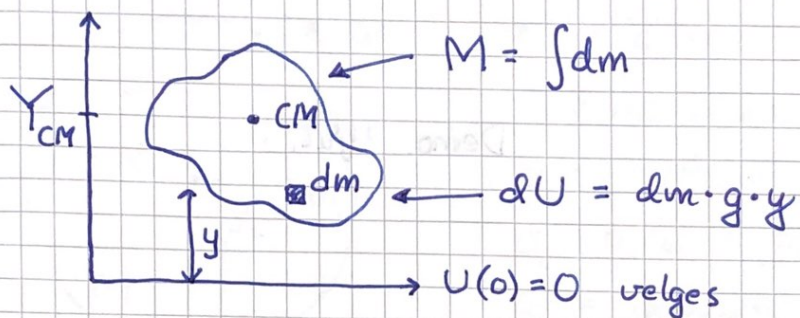
$$y = r \sin \theta$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y_{CM} &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, r d\theta \, dr &= \frac{4}{3\pi} R \approx \underline{\underline{0.42R}} \\ &\quad \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{1}{3} R^3} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{1 - (-\cos \theta) = 2} \end{aligned}$$

Oppgaver: Vis at $Y_{CM} = 2R/\pi$ for halv ring og $Y_{CM} = 3R/8$ for halv kompakt kule.

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet. Tyngdepunkt. (21)



Total pot. energi: $U = \int dU = \int g y dm = g M Y_{CM}$,
dvs som om all masse M befant seg i høyde Y_{CM} .

Og når g er konstant, er CM og tyngdepunktet på samme sted.

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6]

Anta N punktmasser $\{m_i\}$ i pos. $\{\vec{r}_i\}$

$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\substack{\uparrow \\ \text{ytre kraft p\aa } m_i}} + \sum_{j \neq i} \underbrace{\vec{F}_{ji}}_{\substack{\nwarrow \\ \text{kraft fra } m_j \text{ p\aa } m_i}}$$

Legger sammen N2 for alle m i systemet.

$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{CM} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$HS: \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{= \vec{F}_{ytre}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= 0 \text{ pga } N3} = \vec{F}_{ytre}$$

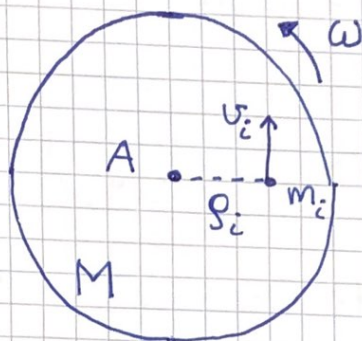
= netto ytre kraft p\aa systemet

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

Dvs, CM beveger seg som om hele M befinner seg i CM og påvirkes av netto ytre kraft p\aa systemet!

Rotasjonsenergi. Tregghetsmoment [OS1 10.4, 10.5]

(22)



$M = \sum_i m_i$ = legemets masse

A = rotasjonsaksen ($\perp$ papirplanet)

r_i = avstand fra A til m_i

$v_i = r_i \omega$ = farten til m_i

ω = legemets vinkel fart

Legemets rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Legemets tregghetsmoment mhp aksen A :

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int r^2 dm$

Generell bevegelse for et stivt legeme:

Translasjon av CM med fart $\vec{V}$ kombinert med rotasjon om en akse gjennom CM med vinkel fart ω . Her kan ω uttrykkes som en vektor $\vec{\omega}$, med retning langs rotasjonsaksen.

Total kinetisk energi er:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad \left[\begin{array}{l} \text{Se notat for} \\ \text{bevis.} \end{array} \right]$$

Her er

M = legemets masse

I_0 = legemets tregghetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM

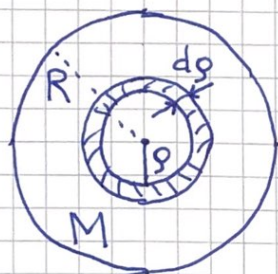
Noen legemer som kan rulle:

(23)

1) Ring og hul sylinder

M  $I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{MR^2}$

2) Kompakt skive og sylinder



Deler skiva i tynne ringer med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r dr$, og dermed treghetsmoment

$$dI_0 = r^2 dm = r^2 \frac{M}{A} dA = r^2 \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r dr$$

Skivas totale treghetsmoment blir dermed

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

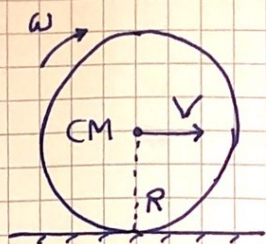
3) Tynt kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
 4) Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ } Se øving m/LF.

Alle disse er på formen $I_0 = c \cdot MR^2$

Legeme	Ring	Kuleskall	Skive	Kule
c	1	$2/3$	$1/2$	$2/5$
				↑ Lab!

Ren rulling [OS1 11.1]

(24)

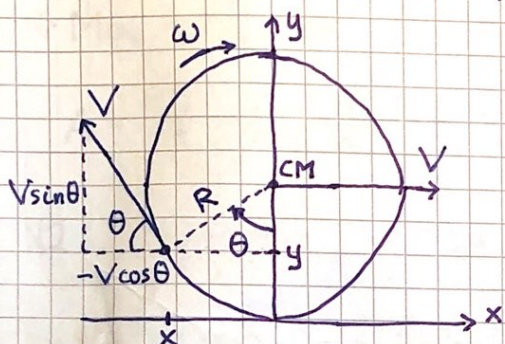


For en helomdreining: $V = \frac{2\pi R}{T}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow \underline{V = \omega R} \quad \text{Rullebetingelsen}$$

$$\Rightarrow \underline{K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} cMR^2 \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{2} (1+c) MV^2}$$

Banen til et punkt på periferien:

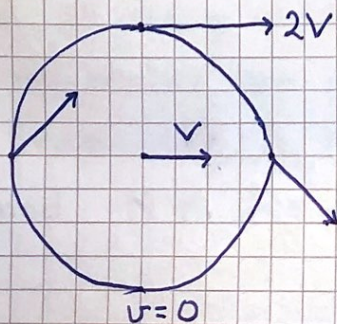
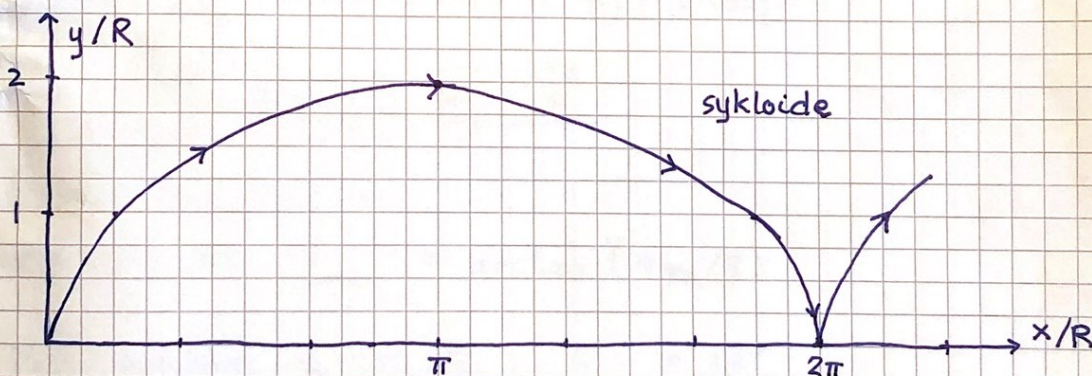


$$\omega = \dot{\theta} = V/R \Rightarrow V = R\dot{\theta}$$

Fra fig.: $u_x = V - V \cos \theta$

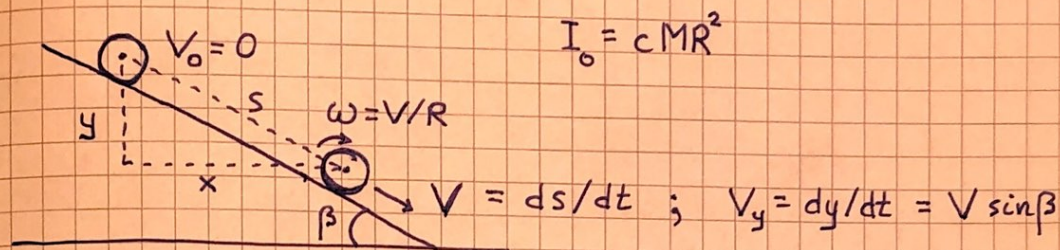
$$u_y = V \sin \theta$$

Banen : $x(\theta) = R \cdot \theta - R \cdot \sin \theta$; $y(\theta) = R - R \cos \theta$



Punktet med bakkekontakt er i ro ; hjulet glir ikke.

Ren rulling på skråplan:



Bestem V , A , f og max β som gir ren rulling.

Løsning: Statisk friksjon gir at mek. energi er bevart.

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2} MV^2 \Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \Rightarrow \text{Kule ruller raskest}$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \sin \beta = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA \Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

$$\text{Fra før: } f \leq \mu_s N \quad ; \quad N = Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}$$

Kule:

$$c = 2/5 \Rightarrow \beta_{\max} = \arctan(7\mu_s/2)$$

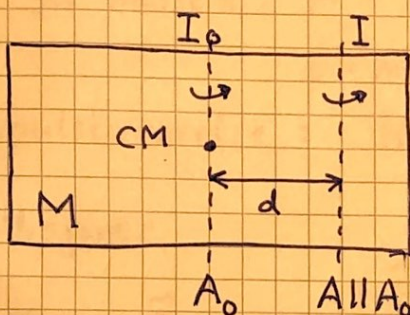
$$\text{Med (f.eks) } \mu_s = 0.25 : \beta_{\max} = 41^\circ$$

Rulling på berg-og-dal-bane:

Mye det samme som på skråplan, men pga at banen er krum blir $A_\perp \neq 0$ (sentrifetalaks.), og dermed $N \neq Mg \cos \beta$.

Steiners sats [OS1 10.5]

(26)

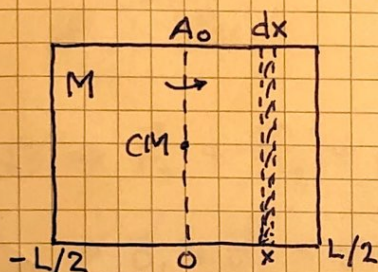


Da er:

$$I = I_0 + Md^2$$

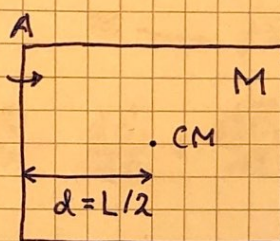
[Se notat for bevis]

Eks 1: Svingdør og sidehengslet dør



$$g = x; dm = M dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = I_0 + Md^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Eventuelt:

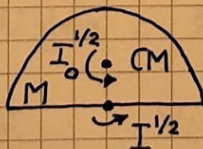
$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \frac{1}{3} ML^2 \quad \text{OK!}$$

Eks 2: [TFY 4125 21/5 - 24]

Kompakt halvkule; I_0 mhp akse gjennom halvkulas CM? (M, R)

$$\text{Oppgitt: } I_0^{\text{HEL}} = \frac{2}{5} \cdot 2M \cdot R^2; \quad Y_{\text{CM}}^{\text{HALV}} = 3R/8$$

Løsn 2:



$$I^{1/2} = \frac{1}{2} I_0^{\text{HEL}} = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\begin{aligned} \text{Steiners sats} \Rightarrow I_0^{1/2} &= I^{1/2} - M \cdot (3R/8)^2 \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right) MR^2 = \underline{\underline{0.26 MR^2}} \end{aligned}$$

Impuls. Kollisjoner. Rakettprinsipp [osi 9]

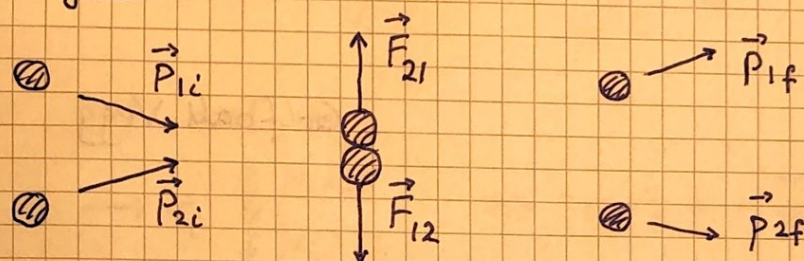
(27)

N2 for masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v} = \text{massens impuls}$; $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

Impulsbevarelse: Hvis $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart

Kollisjoner



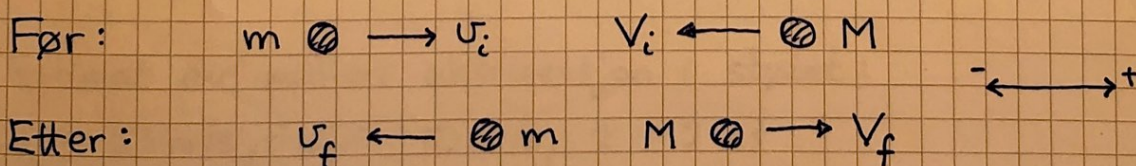
N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \quad \xRightarrow{N2} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$, når ytre krefter kan neglisjeres i den typisk kortvarige kollisjonen

Mekanisk energi E kan gå tapt pga friksjon og deformasjon

- Elastisk støt: $\Delta E = 0$
- Uelastisk "": $\Delta E < 0$. Hvis legemene henger sammen etter kollisjonen, med felles slutfart, kalles det et fullstendig uelastisk støt. Da er $|\Delta E|$ maksimal.

Sentralt støt: Kollisjon i 1D



$\Delta p = 0$: $m u_i + M V_i = m u_f + M V_f$ (1)

Hvis fullstendig uelastisk: $u_f = V_f = (m u_i + M V_i) / (m + M)$

Elastisk støt: $\frac{1}{2} m u_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2$ (2) (28)

Lign. (1) og (2) Løst mhp slutt hastighetene:

$$u_f = \frac{M}{m+M} \left(2V_i + u_i \cdot \frac{m-M}{M} \right) ; V_f = \frac{m}{M+m} \left(2u_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks1: $M=m$, $V_i=0$. Da blir $u_f = 0$ og $V_f = u_i$.

$$m \otimes \rightarrow u_i \quad \otimes m \quad V_i=0 \Rightarrow m \otimes \quad \otimes \rightarrow u_i \quad u_f=0$$

Eks2: Ball mot vegg

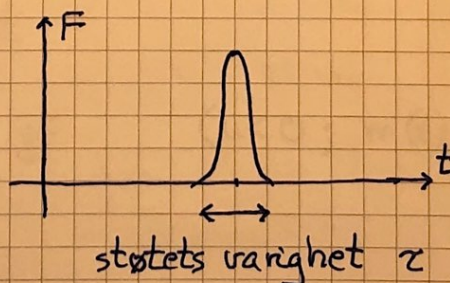
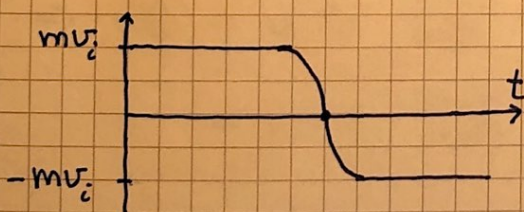
$$m \otimes \rightarrow u_i \quad \left\{ \begin{array}{l} M=\infty \\ V_i=0 \end{array} \right. \Rightarrow u_f=? \leftarrow m \quad \left\{ \begin{array}{l} M \\ V_f=? \end{array} \right.$$

$$u_f = \frac{M}{m+M} \cdot u_i \cdot \frac{m-M}{M} \approx \underline{\underline{-u_i}} ; V_f = \frac{2m u_i}{M+m} \approx \underline{\underline{0}}$$

Impulsbevarelse: $m u_i = m u_f + M V_f = -m u_i + \frac{2m M u_i}{M+m} = m u_i$; OK

Kraftstøt (eng: impulse): F fra vegg endrer ballens impuls

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow dp = F dt \Rightarrow \Delta p = \int dp = \int F(t) dt$$



Estimat av midlere akselerasjon i støtet:

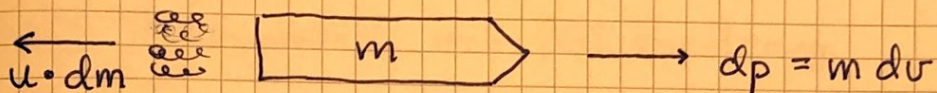
$$u_i \approx 10 \text{ m/s}, u_f \approx -10 \text{ m/s}, \tau \approx 2 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \langle a \rangle = \frac{20 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 10^4 \text{ m/s}^2 \gg g ; \text{dus OK \AA}$$

neglisjere ytre krefter (mg) i kollisjons- "øyeblikket"

Rakettprinsipp

(29)



Forbrent drivstoff, dm pr tidsenhet, sendes bakover med fart u . Pga impulsbevarelse øker rakettenes fart:
 $m \cdot dv = u \cdot dm$

N2 for raketten: $m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = F_{\text{skyr}}$

Skyrkraft: $F_{\text{skyr}} = u \cdot \dot{m}$

Ved oppskyting i tyngdefeltet: $F = u \dot{m} - mg$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$$

La oss beregne $v(t)$. Antar $v(0)=0$ og konstante u og g .

Multipliser lign. med dt/m og integrer fra 0 til t :

$$\int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow v(t) = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - gt$$

$$= |u| \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt \quad (u < 0; m(t) < m(0))$$

Eks [TFY4125 21/5-24]:

$m_0 = m(0) = 3.04 \cdot 10^6$ kg; $|u| = 2.58$ km/s; ønsker $a = 0.20g$ ved takeoff. Hva er påkrevd $|\dot{m}|$?

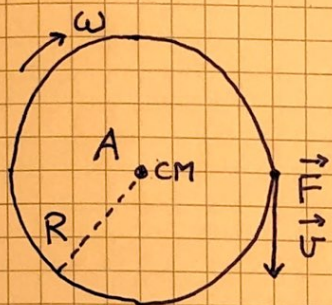
Løsn: $|\dot{m}| = m_0(a+g)/|u| = [3.04 \cdot 10^6 \cdot 1.20 \cdot 9.81 / 2580] \text{ kg/s}$
 $= \underline{\underline{1.39 \cdot 10^4 \text{ kg/s}}}$

Rotasjonsdynamikk

[051 10]

(30)

Først: Rotasjonsakse med fast orientering.



$$\text{Tilført effekt: } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv = FR\omega$$

$$\text{Kraftens dreiemoment: } \tau = F \cdot R$$

$$\Rightarrow P = \tau \cdot \omega$$

Alternativt:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right) = I_0 \omega \frac{d\omega}{dt}$$

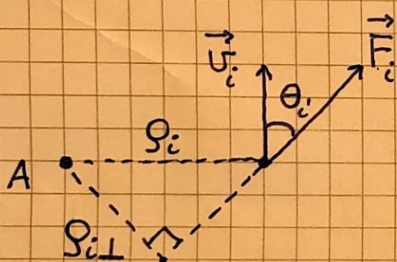
Dermed:

$$\tau = I_0 \dot{\omega}$$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering (her gjennom CM)

På samme form som $F = m\dot{v}$!

Generalisering:



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i$$

$$= \sum_i F_i r_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

$$\text{med } \tau = \sum_i F_i r_{i\perp} \cos \theta_i = \sum_i F_i r_{i\perp} = \text{netto ytre dreiemoment mhp rot.aksen } A$$

$r_{i\perp}$ = avstanden fra rot.aksen til kraftens forlengelseslinje = kraftens arm

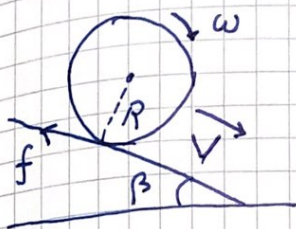
Ved å sammenholde

$$P = dW/dt \quad \text{og} \quad P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$$

ser vi at $dW = \tau d\phi$ er arbeidet utført av τ når omløpt vinkel er $d\phi$. På samme form som $dW = F \cdot dx$!

Eks 1: Ren rulling på skråplan

(31)



$$I_o = cMR^2, \quad \omega = V/R, \quad \dot{\omega} = \dot{V}/R$$

$$F_{||} = Mg \sin \beta - f \stackrel{N2}{=} M\dot{V}$$

$$N2, \text{ rotasjon om CM: } \tau = I_o \dot{\omega}$$

Bare $\vec{f}$ har en arm mhp aksen gjennom CM;

$\vec{N}$ og $M\vec{g}$ passerer gjennom CM. $\Rightarrow \tau = f \cdot R$

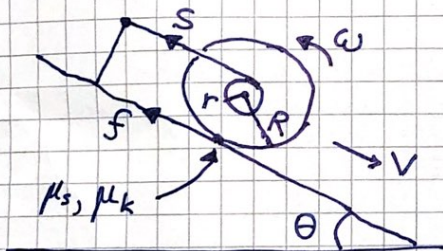
$$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \dot{V}/R \Rightarrow f = cM\dot{V}; \text{ settes inn i N2:}$$

$$Mg \sin \beta - cM\dot{V} = M\dot{V} \Rightarrow \underline{\dot{V} = \frac{g \sin \beta}{1+c}}; \underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}$$

Som med energibevarelse s. 25.

Eks 2: Snelle baklengs på skråplan

(Øving 6)



- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å rotere baklengs og gli nedover skråplanet?

Tips: N1 $\parallel$ skråplanet og N1 rot. om CM;

$$f = \mu_s \cdot N \text{ når } \theta = \theta_0$$

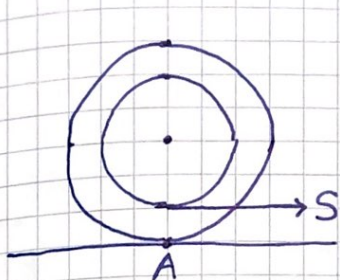
- Hva er S og $\dot{V}$ når $\theta > \theta_0$?

Tips: N2 $\parallel$ skråplanet og N2 rot. om CM; $f = \mu_k \cdot N$

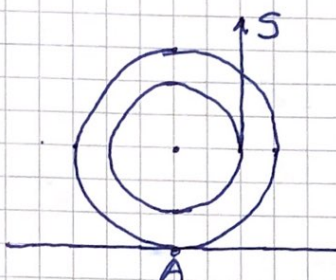
Merk: Translasjon $2\pi r$ og rotasjon 2π tar like lang tid $\Rightarrow V = \omega \cdot r$

Eks 3: Hvilken vei ruller snella?

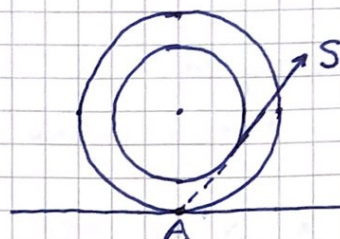
(32)



Høyre



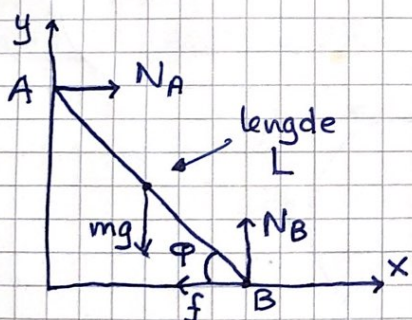
Venstre



I ro

Velger kontaktlinjen A mellom snelle og underlag som (rotasjons-)akse. Tyngdekraften Mg , normalkraften N og friksjonskraften f har alle null arm mhp akse A, bare snordraget S kan ha en arm $\neq 0$ mhp A. Forlengelse av $\vec{S}$ relativt A avgjør om snella ruller mot høyre eller venstre, evt. blir liggende i ro.

Eks 4: Vil stigen gli?



Anta statisk friksjonskoeff. μ i B, men null friksjon i A. Da vil stigen begynne å gli dersom

$$f = f_{\max} = \mu N_B$$

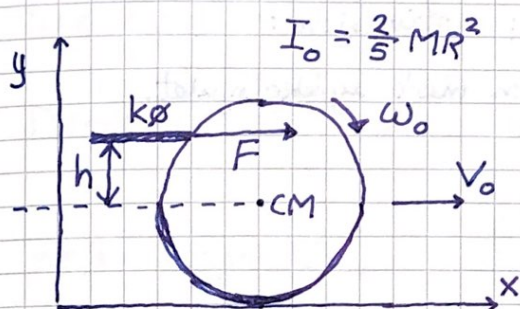
Stigen i ro, statisk likevekt, når $\sum F_x = \sum F_y = 0$ og $\sum \tau_B = 0$, dvs vi velger (f.eks.) akse i B, $\perp$ xy-planet:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 : f = N_A \\ \sum F_y = 0 : N_B = mg \end{array} \right\} \text{Kombinert med } f = \mu N_B \text{ får vi}$$

$$N_A = \mu N_B = \mu mg$$

$$\sum \tau_B = 0 : mg \frac{L}{2} \cos \varphi = N_A L \sin \varphi = \mu mg L \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \underline{\tan \varphi_{\min} = 1/2\mu}$$



- Bestem $h = h_0$ som gir ren rulling umiddelbart.
- Diskuter $h > h_0$ og $h < h_0$.

Vi antar støt med kort varighet Δt og stor kraft F , slik at friksjon (fra underlaget) kan neglisjeres i selve støtet.

$$N2: F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M \cdot V_0 \quad (1)$$

$$N2 \text{ rot. om CM: } \tau = I_0 \Delta \omega / \Delta t \Rightarrow F h \Delta t = I_0 \omega_0 = \frac{2}{5} MR^2 \omega_0 \quad (3)$$

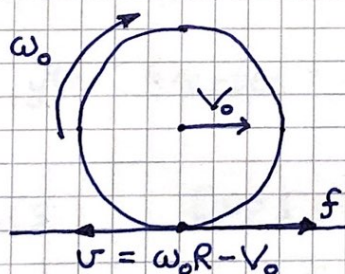
$$\text{Ren rulling: } \omega_0 = V_0 / R \Rightarrow F h_0 \Delta t = \frac{2}{5} MR V_0 \quad (2)$$

$$(2) \text{ dividert med } (1) \text{ gir: } \underline{h_0 = 2R/5}$$

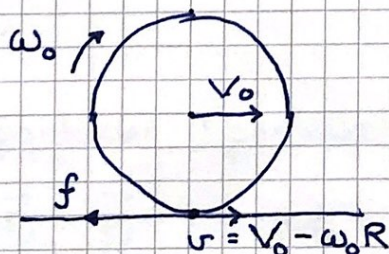
Hvis $h \neq h_0$: (3) dividert med (1) gir:

$$h = \frac{2}{5} \omega_0 R^2 / V_0 \Rightarrow \omega_0 = (h/h_0) \cdot V_0 / R$$

$h > h_0$: $\omega_0 > V_0 / R$, "toppspinn":



$h < h_0$: $\omega_0 < V_0 / R$, "underskru":



Kula glir i starten ("sluring"), men pga friksjonen f , og dens dreiemoment

$$\tau_f = (\pm) f \cdot R$$

vil ω og V/R nærme seg hverandre og etter hvert gi ren rulling.

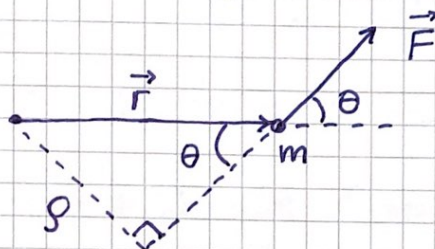
Rotasjonsdynamikk med vektorer

(34)

Nødvendig når rotasjonsaksen ikke har fast orientering.

Dreiemoment [OS1 10.6]

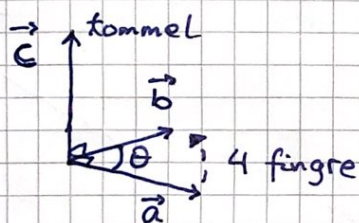
Referansepunkt
(Typisk origo)



$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$ = kraftens dreiemoment, relativt origo

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$

Høyrehåndsregel (HHR) for kryssprodukt:



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

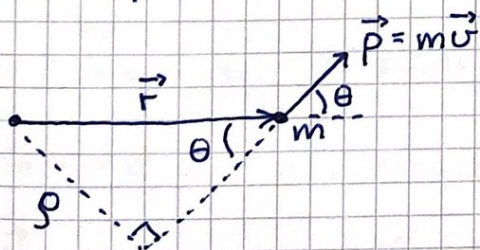
Absoluttverdi: $\tau = r F \sin \theta = g F$

g = kraftens arm (som før)

Hvis flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls

[OS1 11.2]



$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$$

= massens dreieimpuls

$$\vec{L} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{L} \perp \vec{p}$$

$$L = r p \sin \theta = g p$$

Hvis flere partikler (partikkelsystem):

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \text{evt.} \quad \vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$$

N2 for rotasjon [OS1 11.2]

(35)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \quad \left(\text{da } \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \quad \text{Jf. } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{På samme form.}$$

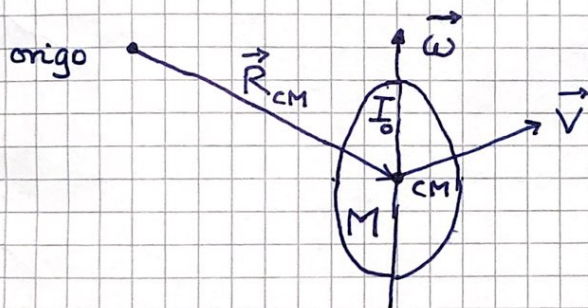
Bevaringslov: $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ er bevart

Betingelser for statisk likevekt (dvs $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$):

$$\vec{\tau} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{F} = 0$$

$\vec{L}$ for stivt legeme [OS1 11.2]

Antar noenlunde symmetrisk legeme, dvs uendret etter rotasjon 180° om rotasjonsaksen.



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = \text{banedreieimpuls}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = \text{indre dreieimpuls (spinn)}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{total dreieimpuls}$$

[Se notat for utledninger]

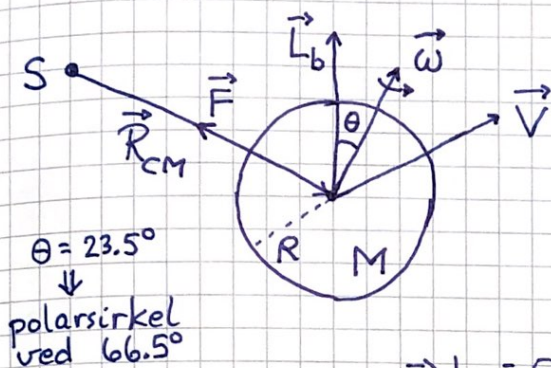
• $\vec{L}_b$ avhenger av ref.punktet; det gjør ikke $\vec{L}_s$

• Hvis ref.punkt i CM: $V=0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

Og hvis akse med fast orientering: $\tau = I_0 \dot{\omega}$, som før (s.30)

Eks 1: L_s og L_b for jorda relativt sola

(36)



$$L_s = I_o \omega ; I_o \approx \frac{1}{3} MR^2 ; \omega = \frac{2\pi}{T_\omega}$$

$$L_b = R_{cm} M V ; V = R_{cm} \Omega ; \Omega = \frac{2\pi}{T_\Omega}$$

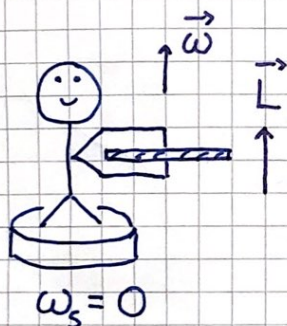
$$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}, R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$R_{cm} = 1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}, T_\omega = 24 \text{ h}, T_\Omega = 365 \text{ d}$$

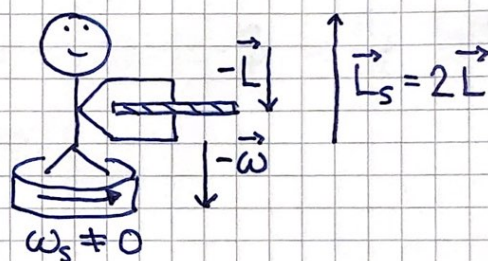
$$\Rightarrow L_s = 5.9 \cdot 10^{33} \text{ Js} ; L_b = 2.6 \cdot 10^{40} \text{ Js} (\Rightarrow L \approx L_b)$$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times \vec{F} = 0 \text{ da } \vec{F} \parallel \vec{R}_{cm} \Rightarrow \vec{L} \text{ er bevart}$$

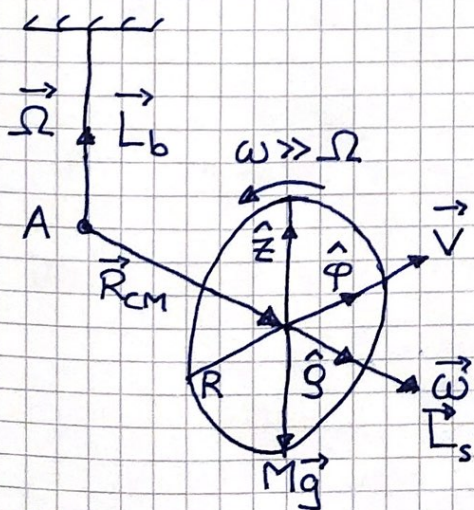
Eks 2: Dreieimpulsbevarelse for student med hjul som spinner



Hjulets snus
 $\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$



Eks 3: Presesjon [OS1 11.4]



$$I_o \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

$$\text{Beregn } T_\omega = 2\pi/\omega$$

$$N2, \text{ rot. om A: } \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}; \quad \vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi} \quad (37)$$

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_b$$

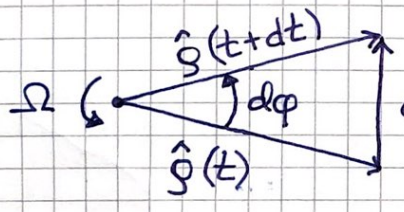
$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm}^2 M \Omega \hat{z}$$

$$\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s$$

$$\text{Innsatt i N2, rot. om A: } R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega \frac{d\hat{g}}{dt}$$

Hjulets aksling, og dermed $\hat{g}$, roterer om z-aksen med vinkel-fart Ω :



$$d\hat{g} = 1 \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} = \Omega dt \cdot \hat{\phi} \Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \Omega \hat{\phi}$$

↑ lengden av $\hat{g}$

Dermed:

$$R_{cm} Mg = MR^2 \omega \Omega$$

Setter inn $\omega = 2\pi/T_\omega$ og $\Omega = 2\pi/T_\Omega$ og løser mhp T_ω :

$$T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega} \approx \frac{(2 \cdot 1 \text{ m})^2}{0.2 \text{ m} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ s}} = \underline{\underline{0.4 \text{ s}}}$$

Dvs, $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omdreininger pr sek.
(= 150 rpm, revolutions per minute)

Svingninger [051 15]

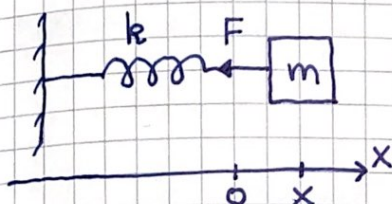
(38)

Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler og krystaller.

Ladning og strøm i elektriske kretser.

Harmonisk oscillator [051 15.1]



x = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt, $F = 0$

$x > 0$: strukket fjær, $F < 0$

$x < 0$: sammenpresset fjær, $F > 0$

Hookes lov: $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ med } \omega_0^2 = k/m$$

Løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

evt. $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

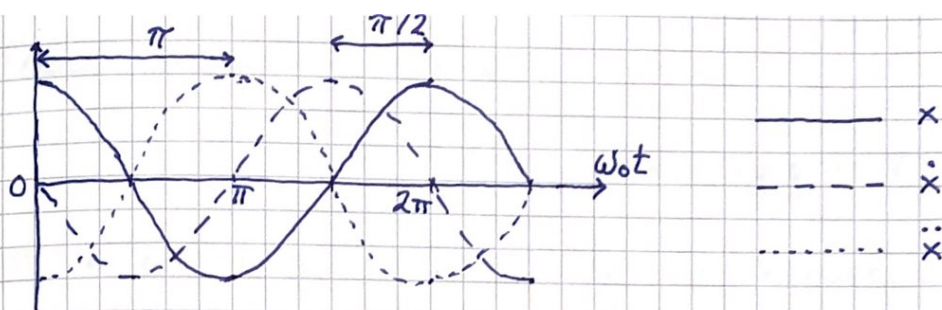
A og φ , evt. B og C , fastlegges med to startbetingelser, f.eks. kjennskap til $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Anta $\varphi = 0$; da er:

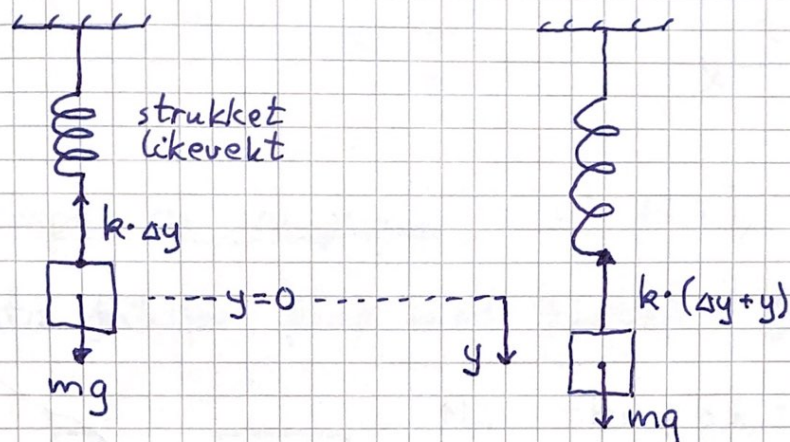
$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$$



Masse og fjær i tyngdefeltet:



$$N1: k \Delta y = mg \\ \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y} \\ \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt med uendret frekvens,
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2]

Anta $\varphi = 0$ og $x(t) = A \cos \omega_0 t$

Potensiell energi:

$$U = -\int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

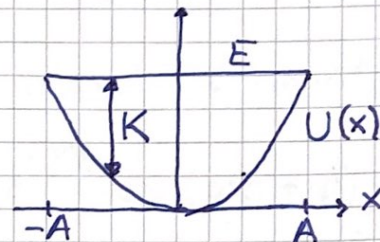
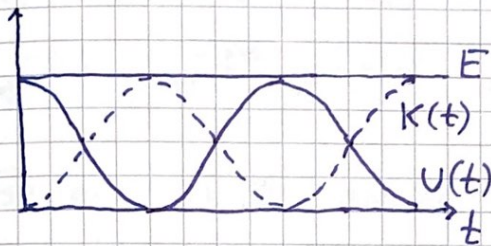
$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mekanisk energi:

(40)

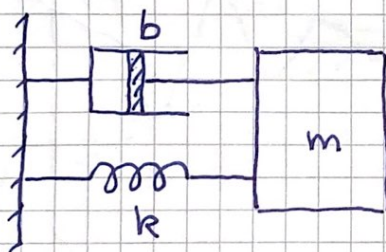
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2, \text{ uavhengig av } t$$

$\Rightarrow$ Fjærkraften $F(x) = -kx$ er konservativ



Dempet fri svingning [OS1 15.5]

Anta friksjon prop. med farten: $f = -b\dot{x}$



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m; \omega_0^2 = k/m$$

Ser at løsningen må være på formen $\exp(-\alpha t)$.

Innsetting gir:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\text{dvs } \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$

$$x(t) = (A + B \cdot t) \exp(-\gamma t)$$

Svakeste damping som ikke gir svingninger.

Bra i f.eks. støtdempere.

Overkritisk damping: $\gamma > \omega_0$

(41)

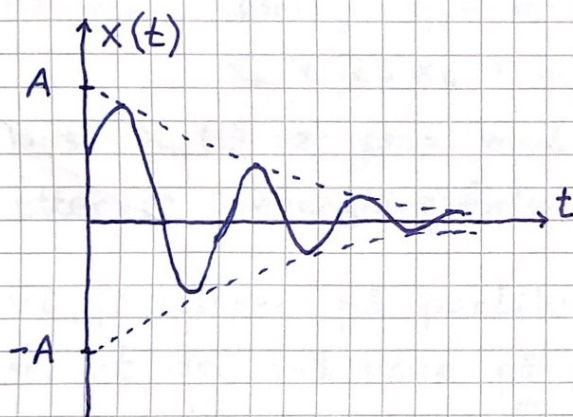
$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t) ; \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Underkritisk damping: $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

Generell reell løsning: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$,
dvs harmonisk svingning med avtagende amplitude $A e^{-\gamma t}$



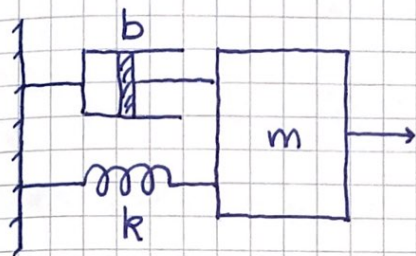
Omhyllningskurver:

$$\text{-----} \pm A e^{-\gamma t}$$

Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ avgjør hvor lenge svingeberegelsen varer

Svak damping: $\gamma \ll \omega_0$

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$



Antar harmonisk ytre kraft:
 $F(t) = F_0 \cos \omega t$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen Løsning oppfyller homogen ligning:

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Dus, $x_h(t)$ er prop. med $\exp(-\gamma t)$ og "dør ut" etter et innsvingningsforløp med ranghet ca $3\tau = 3/\gamma$.

Vi fokuserer på partikulærløsningen $x_p(t)$, og vi ser at den må være på formen

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ = A(\omega) \{ \sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega) \}$$

Innsetting gir 2 ligninger, hhv

$$\sin \omega t \cdot f_1(A, \varphi) = 0 \quad \text{og} \quad \cos \omega t \cdot f_2(A, \varphi) = 0$$

hvoretter $f_1 = 0$ og $f_2 = 0$ fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right]$$

Resonans: Med svak demping, $\gamma \ll \omega_0$, og ytre kraft med frekvens $\omega \approx \omega_0$ blir amplituden

A stor!

Eks: Hva er midlere tilført (og tapt) effekt når $\omega = \omega_0$?

(43)

Løsn:

Fra før: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Her: $P(t) = F(t) \cdot \dot{x}(t)$.

Middelverdi over en periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\omega_0$:

$$\langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctan 0 = 0$$

$$A(\omega_0) = F_0 / (m \cdot 2\gamma \omega_0) = F_0 / b \omega_0$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A(\omega_0) \cos \omega_0 t = (F_0 / b) \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \langle F_0 \cos \omega_0 t \cdot \frac{F_0}{b} \cos \omega_0 t \rangle = \frac{F_0^2}{b} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

Vi har $\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$, og må ha

$$\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle, \text{ slik at } \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = F_0^2 / 2b$$

Ved stasjonære forhold må dette tilsvare midlere tapt effekt pga friksjon:

$$\langle P_f \rangle = \langle -b \dot{x} \cdot \dot{x} \rangle = -b \cdot \left(\frac{F_0}{b} \right)^2 \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = -F_0^2 / 2b$$

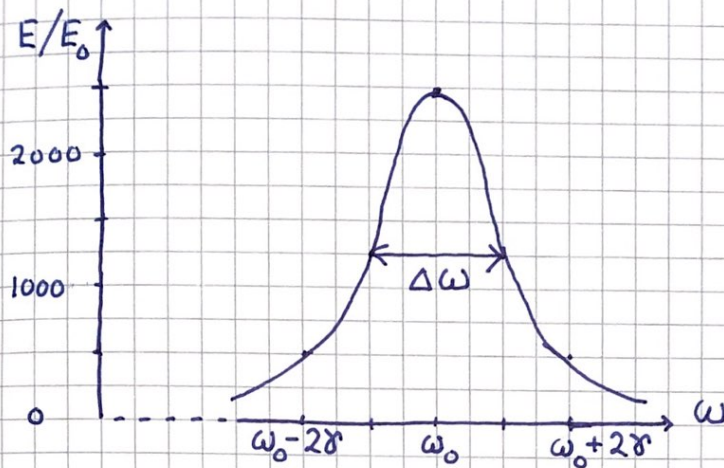
Eks 2: Bestem og plott oscillatorens energi E som funksjon av den ytre kraftens frekvens ω , for svak damping $\gamma = \omega_0 / 100$.

Løsn:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$\text{med } E_0 = F_0^2 / 2k$$

(44)



$$E(\omega_0) = 2500 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm \delta) = 1250 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm 2\delta) = 500 E_0$$

Resonanskurvens halvverdbredde
(FWHM: Full Width at Half Maximum):

$$\Delta\omega = 2\delta = b/m$$

Oscillatorens Q-faktor (quality factor):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Stærk demping $\Rightarrow Q \gg 1$, dvs. smal resonanskurve.

$$\text{Her: } \Delta\omega = 2\delta = \omega_0/50$$

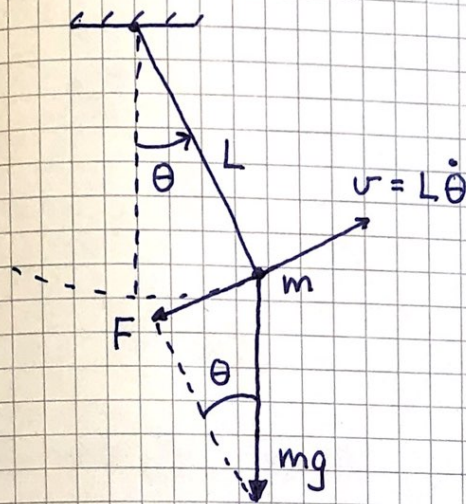
$$\Rightarrow Q = 50$$

Pendler

[OS1 15.4]

(45)

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs stang/snor.



N2 || sirkelbanen:

$$F = ma$$

med

$$F = -mg \sin \theta$$

$$a = \ddot{r} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Antar små utsving omkring likevekt:

$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Foucaultpendelen i Realfagbygget.

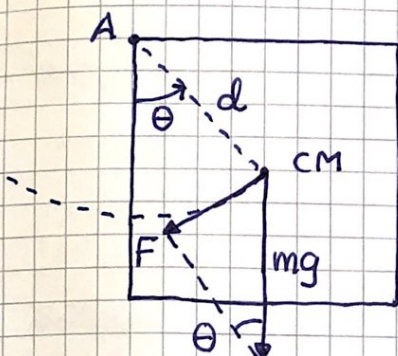
$L = 25\text{m}$. Hva er perioden?

Løsn:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \approx \underline{\underline{10\text{s}}}$$

(46)

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A i avstand d fra CM.



Masse m .

Tregghetsmoment mhp A: I

Dreiemoment mhp A:

$$\tau = -F \cdot d = -mgd \sin \theta$$

N2, rotasjon om A: $\tau = I \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving omkring likevekt: $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = mgd/I$$

Eks: [TFY 4125 21.05.24]



Harmonisk svingning om akse A halvveis mellom hjørnet og CM.

$$M = 0.50 \text{ kg}, \quad L = 50 \text{ cm}, \quad I_0 = ML^2/6$$

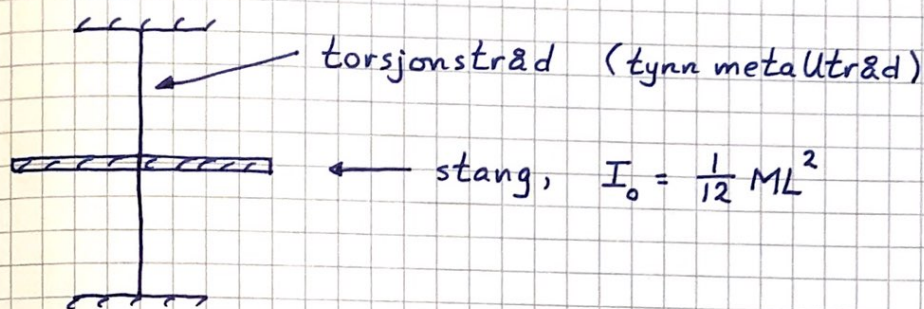
Hva er svingetida?

$$\text{Løsn: } I = I_0 + Md^2; \quad d = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} L = L/2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I = ML^2 \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) = ML^2 \cdot \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{I/Mgd} = 2\pi \sqrt{7\sqrt{2}L/12g} \approx \underline{\underline{1.3s}}$$

Torsjionspendel:



Tråden vris når stanga dreies en vinkel θ .

⇒ Tråden virker på stanga med dreiemoment prop. med θ ,

$$\tau = -\kappa \theta,$$

med retning tilbake mot likevekt.

κ = trådens torsjonsstivhet ; $[\kappa] = \text{N} \cdot \text{m}$



[sett langs torsjonstråden]

N2, rotasjon om trådaksen:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}$$

Eks: $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$, $T = 0.8 \text{ s}$. Hva er κ ?

Løsn:

$$\begin{aligned} \kappa &= I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0.050 \text{ kg} \cdot (0.11 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{0.8 \text{ s}}\right)^2 \\ &\approx \underline{\underline{0.003 \text{ Nm}}} \end{aligned}$$

- Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -Dv^2\hat{v}$
- Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\sum \mathbf{F}_i = 0$ $\sum \boldsymbol{\tau}_i = 0$
- Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = \mathbf{R}_{CM} \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$
- Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
 Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
 Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellaksesteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
 Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
 Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
 $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
 Underkritisk damping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
 Overkritisk damping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 Kritisk damping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
 amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
 halvverdbredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

ELEKTROMAGNETISME

(49)

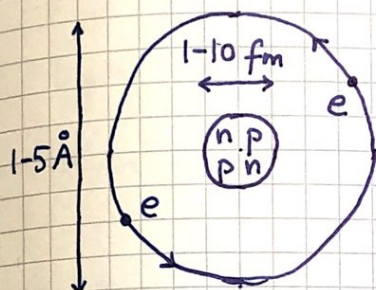
Elektrostatikk [OS2 5-8]

Elektrisk Ladning [OS2 5.1]

Materie: atomer. Atom: atomkjerne og ett eller flere elektroner.

Atomkjerne: proton(er) og nøytron(er).

Bohrs klassiske atommodell (1913 ; NP1922):



Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	-e
proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	+e
nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

[$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$; $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$ (ångström)]

Ladning er kvantisert i enheter av

$$e = \text{elementærladningen} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Symbol for ladning: q, Q. Enhet: [q] = C (coulomb)

Nøytralt atom, atomnr. Z:

$$Z \text{ protoner, } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$$

Ioner: Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

Eks: Li^+ , Ca^{2+} , F^- , CO_3^{2-} , H_3O^+

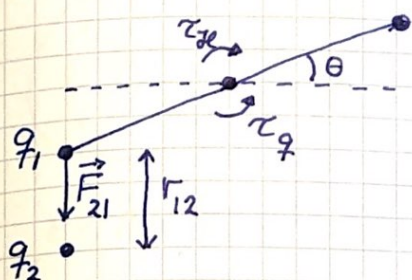
Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner

Eks: ^{12}C , ^{13}C , ^{14}C har hhv 6, 7, 8 nøytroner ($Z=6$)

Coulombs lov [OS2 5.3]

(50)

Coulomb, 1785:



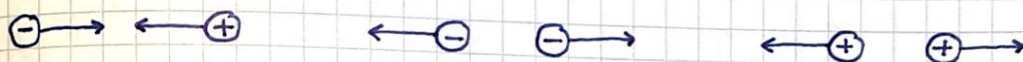
Torsjongspendel, sett ovenfra

Likevekt når $\tau_q = \tau_{\mathcal{H}}$

$$\tau_{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \theta$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta$$

Exp. gav $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$; tiltrekning mellom ulike typer ladning, frastøtning mellom like typer ladning:

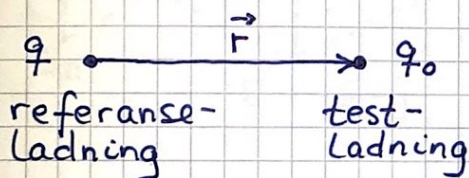


$$\Rightarrow \text{Coulombs lov: } \boxed{\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{21}}$$

$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ = vakuumpermittiviteten

$$\Rightarrow 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5]



Kraft fra q på q0:

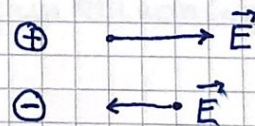
$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ el. kraft pr ladningsenhet

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 ; [E] = \text{N/C}$$

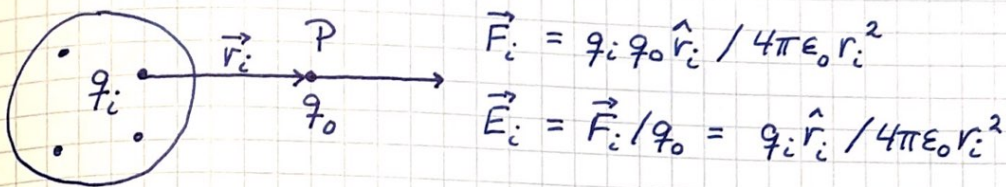
$\Rightarrow$ Punktladning q omgir seg med et el. felt

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} ; \begin{array}{l} \text{bort fra } q > 0 \\ \text{inn mot } q < 0 \end{array}$$



El. felt fra flere ladninger:

(51)

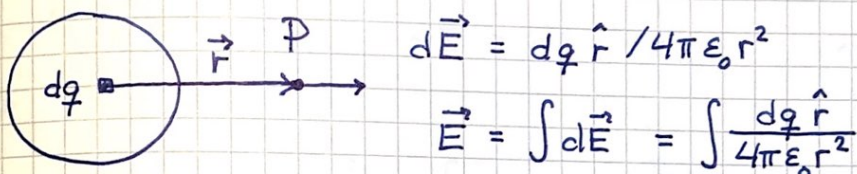


$$\vec{F}_i = q_i q_0 \hat{r}_i / 4\pi\epsilon_0 r_i^2$$

$$\vec{E}_i = \vec{F}_i / q_0 = q_i \hat{r}_i / 4\pi\epsilon_0 r_i^2$$

El. felt i pos. P fra $\{q_1, q_2, \dots\}$: $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$

El. felt fra kontinuerlig ladningsfordeling: $q_i \rightarrow dq$; $\sum_i \rightarrow \int$

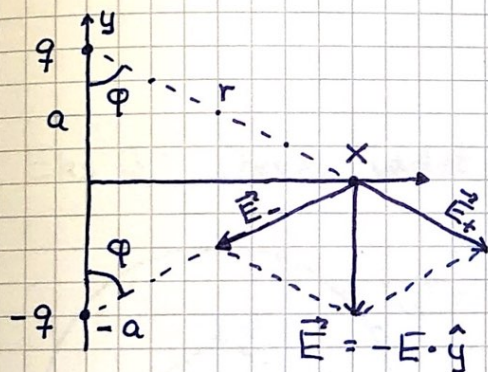


$$d\vec{E} = dq \hat{r} / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Elektrisk dipol

Punktladninger $\pm q$ i $y = \pm a$. Bestem $\vec{E}$ på x-aksen.



$$E = 2E_+ \cos\phi \quad (E_- = E_+)$$

$$\cos\phi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$E_+ = q / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

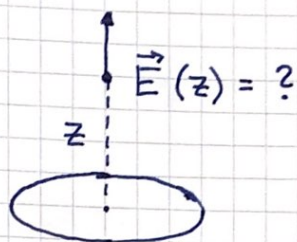
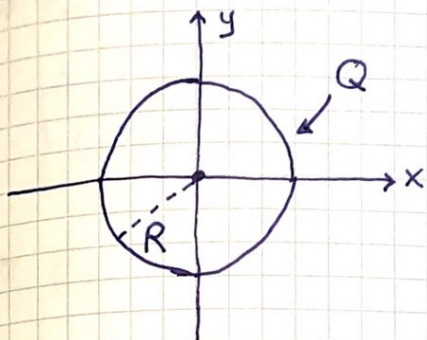
Langt unna dipolen, dvs $x \approx r \gg a$:

$$\vec{E} \approx -\hat{y} \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \text{dvs } E(r) \sim 1/r^3$$

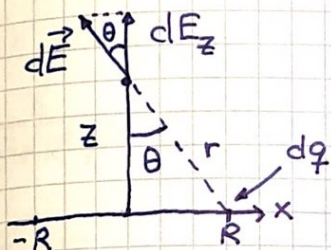
$\vec{E}_+$ og $\vec{E}_-$ kansellerer delvis, slik at $E(r)$ går raskere mot null enn $E(r) \sim 1/r^2$ fra en punktladning.

Eks 2: Jevnt ladet ring; $\vec{E}$ på symmetriaksen

(52)



Pga symmetri:
 $\vec{E} = E_z \hat{z}$



Bidrag til E_z fra dq :

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

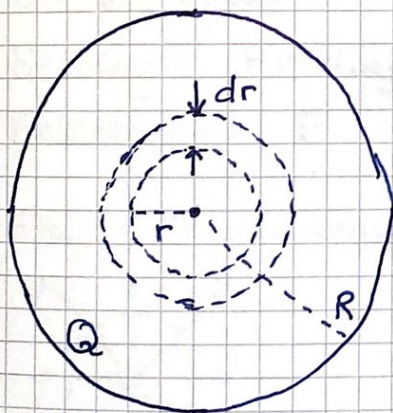
$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2 ; \cos \theta = \frac{z}{r} ; r^2 = z^2 + R^2$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Er svaret rimelig? Ja: $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$;

$$E_z(z \gg R) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$$

Eks 3: Jevnt ladet skive; $\vec{E}$ på symmetriaksen (= z-aksen)



Skiva betraktes som mange tynne ringer, med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r dr$, og ladning $dq = Q \cdot dA/A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2$, og dermed bidrag $dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}$ til feltet $\vec{E} = E_z \hat{z}$ på z-aksen.

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

(53)

$$\int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \left| -\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right|_0^R = \frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right]$$

Er svaret rimelig? Ja, dersom $z \gg R$ har vi

$$\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}, \text{ dvs som med punktladning } Q \text{ i origo; OK.}$$

Dersom $R \gg z$: $E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, der $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ er skivas ladning pr flateenhet. Dvs, feltet er tilnærmet konstant i nærheten av ei jevnt ladet skive!

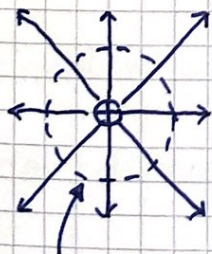
Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6]

Gir et bilde av $\vec{E}$ i et område omkring ladningene.

Retning: Feltlinjene $\parallel \vec{E}$

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet.

Eks 1: Punktladning



Kuleflate med radius r

Feltlinjer pr flateenhet i avstand r :

$$N/A = N/4\pi r^2 \sim 1/r^2$$

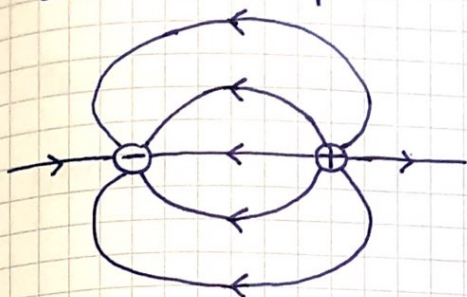
Feltstyrke i avstand r :

$$E = q/4\pi\epsilon_0 r^2 \sim 1/r^2$$

$\Rightarrow E$ prop. med N/A , OK.

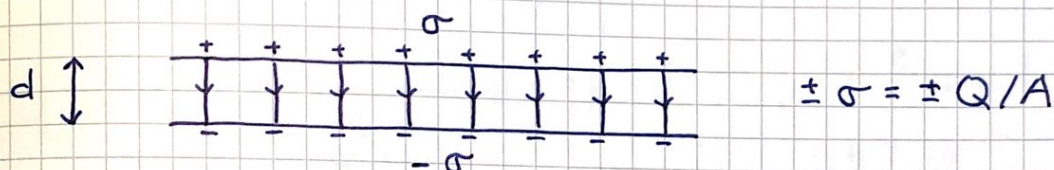
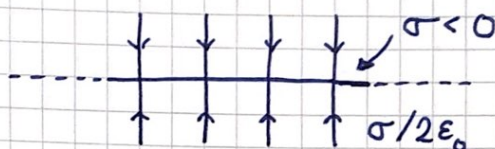
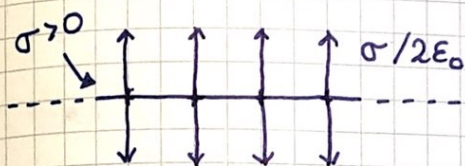
Eks 2: Dipol

(54)



Vi ser at feltlinjer starter på positive ladninger og ender på negative ladninger.

Eks 3: Jevnt ladet plate og parallellplatekondensator



Dersom $d \ll \sqrt{A}$, er $\vec{E}$ (tilnærmet) konstant mellom platene, med feltstyrke

$$E = 2 \cdot \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$$

Utenfor volumet mellom platene er

$$E \approx 0$$

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7]

Enkel dipol: $-q \quad \vec{d} \quad q$

Har dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$; $[p] = C \cdot m$

Flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

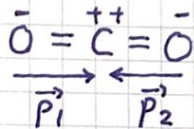
(55)

Kontinuerlig ladningsfordeling : $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

Nettoladning for dipol er null : $\sum_i q_i = 0$; $\int dq = 0$

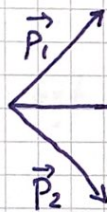
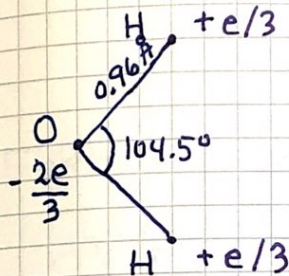
Eks 1 : CO_2

Lineært :



$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Eks 2 : H_2O



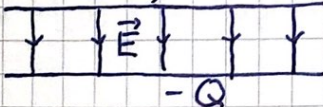
$$\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 ; \quad p = 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot 0.96 \text{ Å} \cdot \cos 52.25^\circ \\ &= \underline{6.3 \cdot 10^{-30} \text{ C m}} \\ &= \underline{0.39 \text{ e Å}} \\ &= \underline{1.89 \text{ D}} \end{aligned}$$

Enheden debye :

$$1 \text{ D} = 10^{-21} \text{ C m} / 299792458 \approx 3.336 \cdot 10^{-30} \text{ C m} \approx 0.208 \text{ e Å}$$

Eks 3 : Platekondensator

$$R = 10 \text{ cm}, Q = 25 \text{ nC}$$



$$d = 1.0 \text{ mm}$$

Bestem $\sigma = Q/A$,

E og p

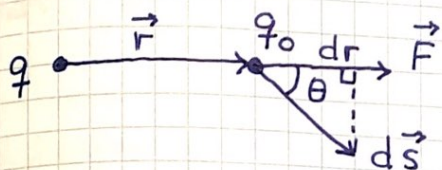
$$\sigma = 25 \cdot 10^{-9} \text{ C} / \pi (0.10 \text{ m})^2 = \underline{8.0 \cdot 10^{-7} \text{ C/m}^2}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 = \underline{9.0 \cdot 10^4 \text{ N/C}}$$

$$p = Q \cdot d = \underline{2.5 \cdot 10^{-11} \text{ C m}}$$

Potensiell energi og elektrisk potensial [052 7.1-7.2] (56)

Pot. energi for Ladningspar :



$$\begin{aligned} dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= -F \cdot dr = -q q_0 dr / 4\pi \epsilon_0 r^2 \\ &= \text{endringen i pot. energi når} \\ &\quad \text{avstanden mellom } q \text{ og } q_0 \\ &\quad \text{endres fra } r \text{ til } r + dr \end{aligned}$$

Naturlig valg: $U(r \rightarrow \infty) = 0$

$$\Rightarrow U(r) = - \int_{\infty}^r \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{pot. energi for}$$

ladningspar q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pot. energi pr Ladningsenhet}$

$$V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{potensialet som } q$$

omgir seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Enhet : $[V] = V$ (volt)

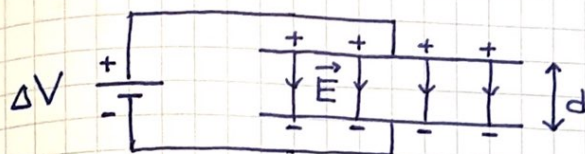
$$\Rightarrow [E] = V/m \quad (\text{brukes mer enn } N/C)$$

Energienhet på atomært nivå :

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV (elektronvolt)} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C} \\ &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Eks 1: Plattekondensator

(57)



$$R = 10 \text{ cm}, \quad d = 1.0 \text{ mm}$$

$$\Delta V = 30 \text{ V}$$

Bestem E og $\pm Q$.

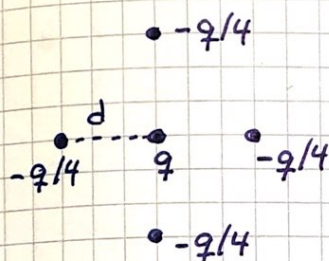
Likespenningskilde

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d \Rightarrow E = \frac{30 \text{ V}}{0.001 \text{ m}} = \underline{30 \text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 \Rightarrow Q = \sigma A = \epsilon_0 E \cdot \pi R^2 = \underline{8.3 \text{ nC}}$$

$\vec{E}$ har retning fra $\oplus$ mot $\ominus$, og fra høyt mot lavt potensial.

Eks 2: Pot. energi for flere punktladninger



Hvert unike ladningspar bidrar med

$$U_{ij} = q_i q_j / 4\pi\epsilon_0 r_{ij}$$

til total pot. energi U .

Anta $q = e$ og $d = 2.0 \text{ \AA}$ og bestem U .
(XeF₄)

Løsn 2: Antall unike ladn. par med N punktladn. er

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!(N-2)!} = \frac{1}{2} N(N-1)$$

Her: $N = 5 \Rightarrow 10$ ladn. par: $e, -e/4$ i avstand d (4 stk);
 $-e/4, -e/4$ i avstand $\sqrt{2} d$ (4 stk); $-e/4, -e/4$ i avst. $2d$ (2 stk)

Dermed:

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left\{ 4 \cdot \frac{(-1/4)}{1} + 4 \cdot \frac{(-1/4)^2}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \frac{(-1/4)^2}{2} \right\} \\ &= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{2.0 \cdot 10^{-10}} \cdot (-0.76) \text{ J} \\ &= -8.76 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ &= \underline{-5.5 \text{ eV}} \end{aligned}$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V

[OS2 7.4]

(58)

$$\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad \text{siden } \vec{F} = q_0 \vec{E} \text{ og } U = q_0 V$$

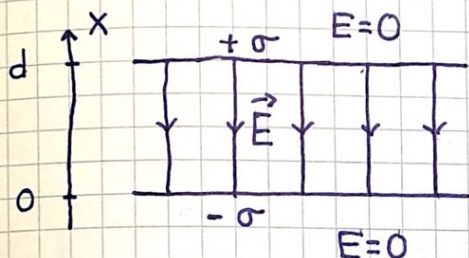
$$1D: V = V(x) \Rightarrow \nabla V = \hat{x} dV/dx$$

$$\text{Kulesymmetri: } V = V(r) \Rightarrow \nabla V = \hat{r} dV/dr$$

Eks1: Punktladning

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r \Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} dV/dr = \hat{r} q/4\pi\epsilon_0 r^2, \text{ OK}$$

Eks2: Platekondensator



Anta $V=0$ på negativt plate
og bestem $V(x)$.

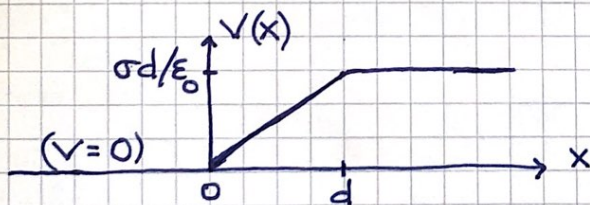
Løsn2:

Fra før: $\vec{E}(x) = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$ mellom platene; $E=0$ utenfor

$$\Rightarrow V(x) = \sigma x/\epsilon_0 + V(0) = \sigma x/\epsilon_0 \text{ mellom platene}$$

$$V(x) = 0 \text{ for } x \leq 0$$

$$V(x) = \sigma d/\epsilon_0 \text{ for } x \geq d$$



Ekvipotensialer [OS2 7.5]

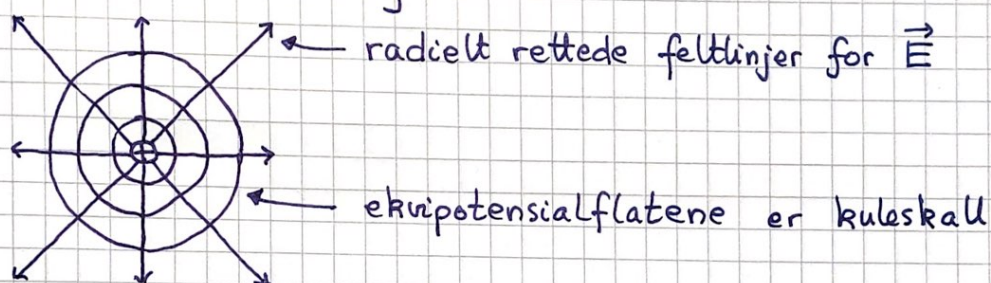
Et ekvipotensial er et område der V er konstant.
Kan være linje, flate eller volum.

Hvis $d\vec{s}$ forbinder to pos. på en ekvipotensialflate, er V like stor i de to posisjonene. Da er $dV=0$, dvs

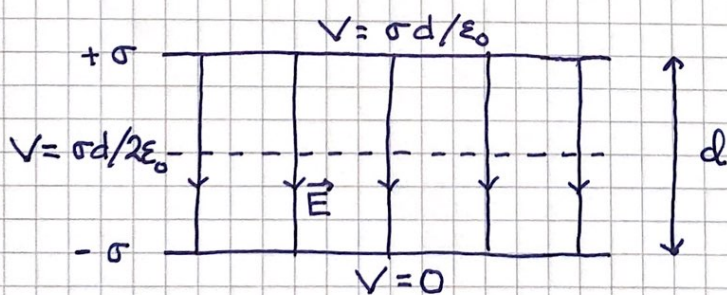
$$-\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Da må $\vec{E} \perp d\vec{s}$, dvs $\vec{E}$ står normalt på ekvipotensialflatene.

Eks 1: Punktladning



Eks 2: Platekondensator



Uniformt felt $\vec{E}$ gir plan $\perp \vec{E}$ med konst. potensial

Materialers elektriske egenskaper

60

Ledere / Metaller

[OS2 7.5 (6.4)]

Har frie elektroner, typisk 1 eller 2 pr atom, som settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$, pga N2: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$.

Dermed, for metaller i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inni et metall.
- All nettoladning ligger på overflaten.
- På overflaten er $E_{||} = 0$ og $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ ($\sigma = Q/A$)
- Metall i likevekt er et ekvipotensial, da $E = 0$ inni og $E_{||} = 0$ på overflaten, slik at $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ for enhver $d\vec{s}$
- Metall med hulrom har $E = 0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

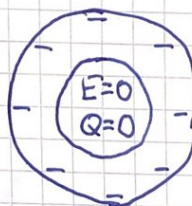
Bevis:



Kompakt metall

Fjern nøytral
bit inni.

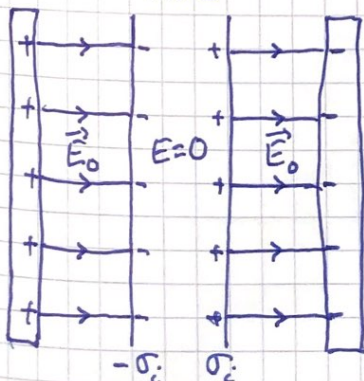
Verken ladning
eller felt endres!



Metall med hulrom

Eks 1: Hva blir induert overflateladning $\pm\sigma_i$ på ei metallskive på tvers i et uniformt ytre felt $E_0 = 1.0 \text{ kV/m}$?

Løsning 1: metall-
skive



Ytre felt: $\vec{E}_0$

Felt pga $\pm\sigma_i$: $\vec{E}_i$

$E_i = \sigma_i/\epsilon_0$ inni skiva; $E_i = 0$ utenfor

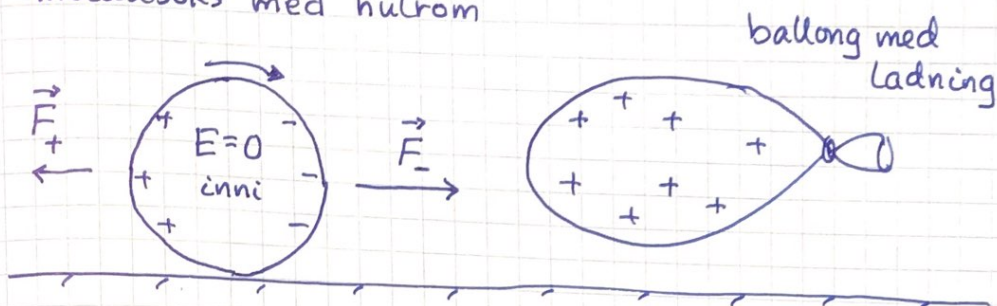
Totalt felt inni skiva: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$

$\Rightarrow E_i = E_0$

$\Rightarrow \sigma_i = \epsilon_0 E_0 = 8.85 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$
 $= 8.85 \text{ nC/m}^2$

Eks 2: Faradaybur metallboks med hulrom

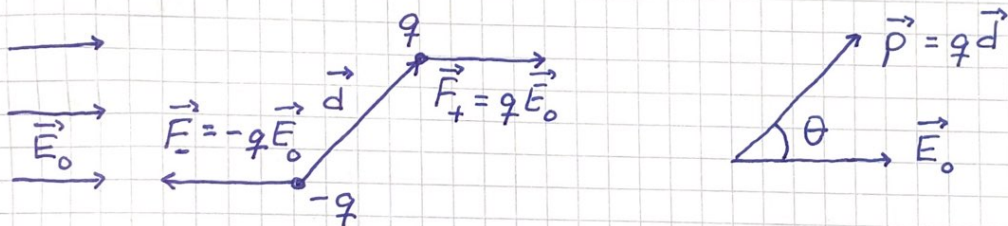
(61)



Netto tiltrekning pga kortest avstand mellom ballongens positive ladning og boksens negative ladning.

Isolator / Dielektrikum [OS2 8.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som gir polarisering i et ytre felt $\vec{E}_0$. Vi ser på en molekylær dipol:

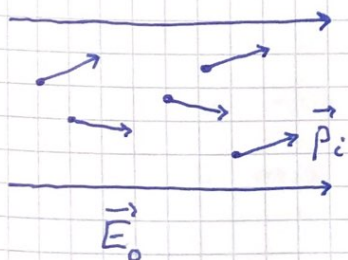


Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (her: inn i planet)

$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = pE_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0| \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Dipolens pot. energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta \Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0}$

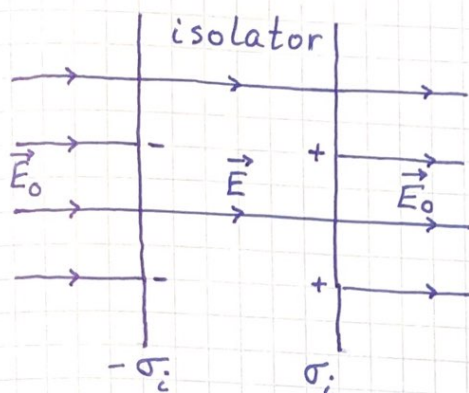
$\Rightarrow$ Dipolene får en tendens til å peke langs det ytre feltet:



polarisering $\stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment pr volumenhett}$
 $\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$; $[P] = C/m^2$

Nettoeffekt: Indusert ladning $\pm \sigma_i$ på overflaten og et svekket felt inni isolatoren:

(62)



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$E = E_0 - E_i < E_0$$

Lineær respons:

$$E_i \text{ prop. med } E_0$$

$$\Rightarrow E \text{ --- " --- } E_0$$

$$\Rightarrow E = E_0 / \epsilon_r$$

Isolatorens relative permittivitet: $\epsilon_r = E_0 / E$

	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	(perfekt metall)
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	(∞)

Isolatorens permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Eks 1: Feltstyrken i avstand $250 \mu\text{m}$ fra et ion med ladning $-2e$ inni en isolator er 9.6 mV/m . Hva er isolatorens relative permittivitet?

$$\text{Løsn 1: } E = E_0 / \epsilon_r = Q / (4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2) (= Q / 4\pi \epsilon r^2)$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = Q / 4\pi \epsilon_0 r^2 E = [9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / \{(250 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 9.6 \cdot 10^{-3}\}]$$

$$= \underline{\underline{4.8}}$$

Eks 2: Hva er farten til synlig lys i vann?

$$\text{Løsn 2: } v = c / n ; n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)} = \text{brytningsindeksen.}$$

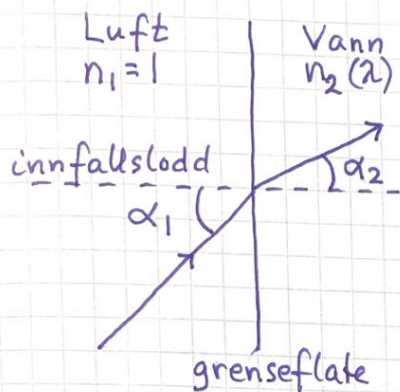
Synlig lys, $\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$: $n \approx 1.3$ for vann.

$$\Rightarrow v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} / 1.3 \approx \underline{\underline{2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

Eks 3: Hvordan oppstår regnbuen?

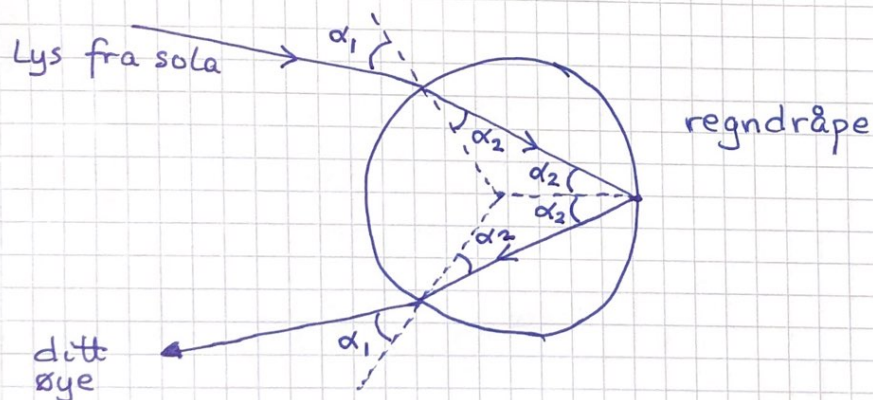
63

Løs 3: Lysstråler endrer retning, de brytes, når de passerer grenseflaten mellom to dielektrika med ulike brytningsindeks. Snells lov: $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$

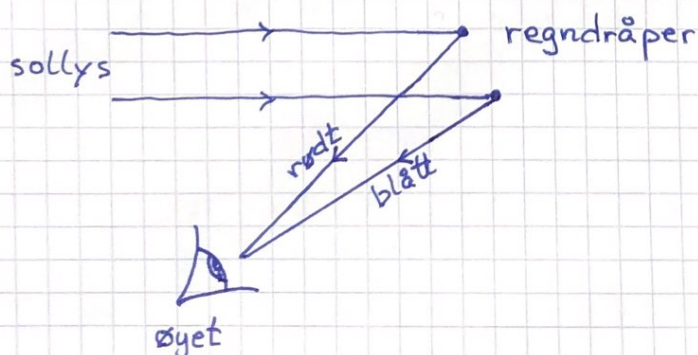


λ (nm)	n_2	farge
400	1.345	fiolett
450	1.341	blå (indigo)
525	1.337	grønn
575	1.335	gul
600	1.334	oransje
700	1.331	rød

$$\alpha_2(\lambda) = \arcsin \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{n_2(\lambda)} \right\}$$

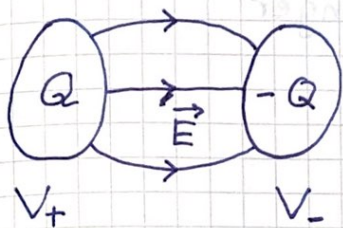


Minste n_2 gir største $\alpha_2 \Rightarrow$ rødt brytes minst



Kondensator. Kapasitans [0528]

To adskilte ledere er en kondensator. (capacitor)

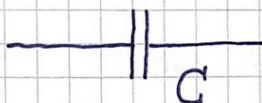


Coulombs lov $\Rightarrow E$ prop. med Q
 $\Rightarrow$ potensialforskjellen, eller
spenningen $V = V_+ - V_-$ også
 prop. med Q

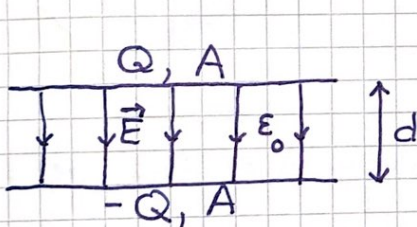
Kondensatorens kapasitans (capacitance):

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{V} \quad ; \quad [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Kretssymbol:



Eks 1 : Platekondensator



$$E = \sigma / \epsilon_0 = \frac{Q}{A \epsilon_0}$$

$$V = E \cdot d = Qd / (A \epsilon_0)$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_0 A / d}$$

Med $d = 1 \text{ mm}$ og $A = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$ blir $C = 0.28 \text{ nF}$

Et dielektrikum mellom platene øker kapasitansen:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma / \epsilon = Q / (A \epsilon_r \epsilon_0) = V / d$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d}, \text{ dvs øker med en faktor } \epsilon_r$$

Enhet for permittivitet:

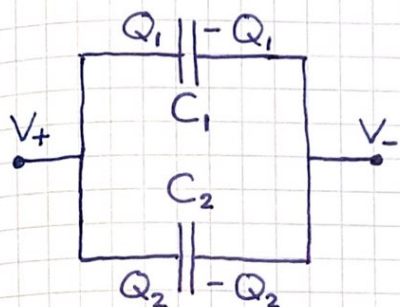
$$[\epsilon] = [C \cdot d / A] = F / m$$

Kobling av kapasitanser

[OS2 8.2]

(65)

Parallellkobling:



Lik spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2$$

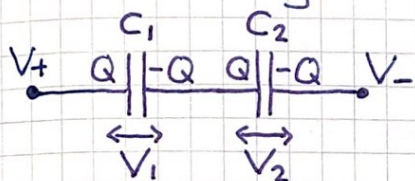
Total ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

Total kapasitans:

$$C = Q / V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



Lik ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

Total spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = V_1 + V_2$$

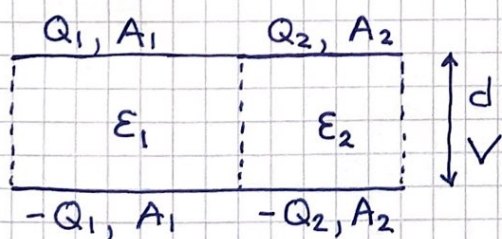
Total kapasitans C gitt ved:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

N kapasitanser i parallell: $C = \sum_{j=1}^N C_j$; i serie: $\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j}$

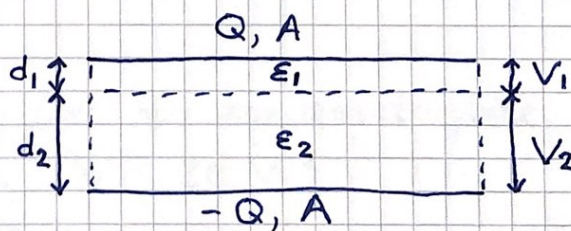
Kondensator fylt med ulike dielektrika:

“Parallellkobling”



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$



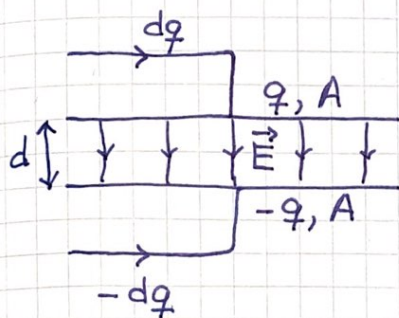
$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

Energi i $\vec{E}$ -felt [OS2 8.3]

(66)

Opplading av kondensator krever et arbeid, som ender opp som pot. energi lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Pot. forskjell mellom platene med ladning $\pm q$: $v(q) = q/C$

Økning av ladningen til $\pm(q+dq)$ øker potensiell energi med

$$dU = v(q) \cdot dq = q \cdot dq / C$$

Dermed må opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gi en total potensiell energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q \, dq / C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Med $C = \epsilon_0 A / d$ og $V = E \cdot d$:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

$A \cdot d$ = volumet mellom platene, der $E \neq 0$.

Dermed:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenhet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

som gjelder generelt.

Eks: Hva er energien mellom to kondensatorplater når $d = 1 \text{ mm}$, $R = 10 \text{ cm}$ og $V = 30 \text{ V}$?

$$\text{Løsn: } U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 0.10^2}{0.001} \cdot 30^2 \text{ J}$$

$$= 1.25 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 125 \text{ nJ} = 782 \text{ GeV}$$

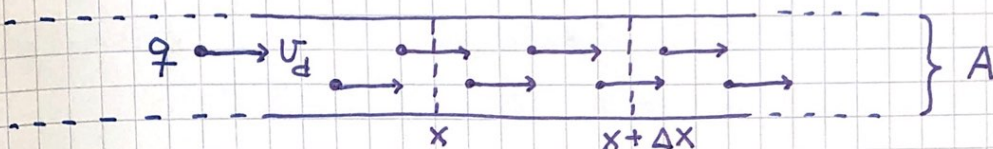
Elektrisk strøm

[052 9, 10]

(67)

Strøm. Strømtetthet [052 9.1, 9.2]

Ser på leder/metall med tverrsnitt A og n frie ladninger q pr volumenhet med midlere driftshastighet v_d langs lederen:



strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} ; [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

$v_d = \Delta x / \Delta t \Rightarrow$ i løpet av $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer all fri ladning $q \cdot n \cdot A \cdot \Delta x$ i volumet $A \cdot \Delta x$ tverrsnittet ved $x + \Delta x$

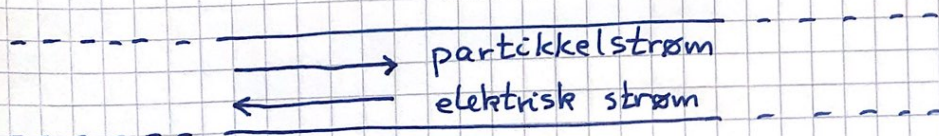
$$\Rightarrow I = qnA\Delta x / (\Delta x / v_d) = nqv_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A = nqv_d, \text{ dvs } \vec{j} = nq\vec{v_d} ; [j] = \frac{A}{m^2}$$

I et metall er frie ladninger elektroner, med $q = -e$, slik at

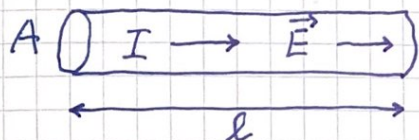
$$\vec{j} = -ne\vec{v_d}$$



Ohms Lov [052 9.2 - 9.4]

(68)

Anta spenning V over leder med lengde l og tverrsnitt A :



$$V = E \cdot l \quad I = j \cdot A$$

N2 for frie elektroner i lederen: $\vec{F} = m_e \vec{a}$, med $\vec{F} = -e\vec{E}$

Pga kollisjoner får elektronene en midlere driftshastighet

$$\vec{v}_d = \vec{a} \cdot \tau \quad ; \quad \tau = \text{midlere tid mellom kollisjoner}$$

Dermed:

$$j = -ne\vec{v}_d = -ne \cdot \left(-\frac{e\vec{E}}{m_e}\right) \cdot \tau = \sigma \cdot \vec{E}$$

der $\sigma = ne^2\tau/m_e$ er materialets elektriske ledningsevne (evt. konduktivitet). Dette er Paul Drudes modell fra ca 1900 for Ohms lov på mikroskopisk form.

På makroskopisk form:

$$V = E \cdot l = (j/\sigma) \cdot l = I \cdot \left(\frac{l}{\sigma \cdot A}\right) = R \cdot I$$

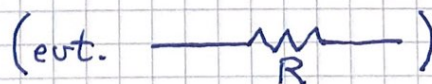
Lederens motstand (resistans):

$$R = \frac{l}{\sigma A} \quad ; \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega \quad (\text{ohm})$$

Lederens konduktans: $G = R^{-1}$; $[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

Materialets resistivitet: $\rho = \sigma^{-1}$; $[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = S/m$

Kretssymbol:



Eks 1: Kobber (Cu) har molar masse 63 g/mol og (69)
masse tetthet ca 9 g/cm³. Anta ca 1 fritt elektron pr atom
og bestem antall frie elektroner pr volumenhet.

Løsn 1: $n \approx \frac{9 \text{ g/cm}^3}{63 \text{ g/mol}} = \frac{1}{7} \text{ mol/cm}^3 \approx 10^{23} / \text{cm}^3 = \underline{\underline{10^{29} / \text{m}^3}}$

Eks 2: Anta at de frie elektronene har fart $v = |\vec{v}| = 10^5 \text{ m/s}$
og reiser en lengde $d = 2 \text{ nm}$ mellom to kollisjoner. Beregn σ .

Løsn 2: $\tau = d/v = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

$$e^2/m_e = (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 / 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2/\text{kg}$$

$$n = 10^{29} \text{ m}^{-3} \text{ (fra eks. 1)}$$

$$\Rightarrow \sigma = ne^2\tau/m_e = \underline{\underline{5.6 \cdot 10^7 \text{ S/m}}}$$

(som er ca exp. verdi for Cu ved romtemperatur)

Eks 3: Anta en strømstyrke på 1 A i en Cu-ledning
med tverrsnitt 2.5 mm². Hva er elektronenes midlere
driftshastighet?

Løsn 3: $j = nev_d$ og $j = I/A$ gir

$$v_d = \frac{I}{neA} = \frac{1 \text{ A}}{10^{29} \text{ m}^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \underline{\underline{25 \mu\text{m/s}}}$$

Motstand og temperatur [OS2 9.3]

(70)

Metaller: Større temp. T gir større elektronfart v , og dermed kortere tid τ mellom kollisjoner. Antall frie elektroner n endrer seg ikke. Dermed: σ avtar; g øker.

Empirisk:

$$g(T) = g_0 [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$$

med $\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$ for flere vanlige metaller.

$g_0 = g(T_0)$ = referanseverdi ved (f.eks.) $T_0 = 293 \text{ K}$ ($= 20^\circ\text{C}$)

Halvledere: Si, Ge, GaAs, AlN, ...

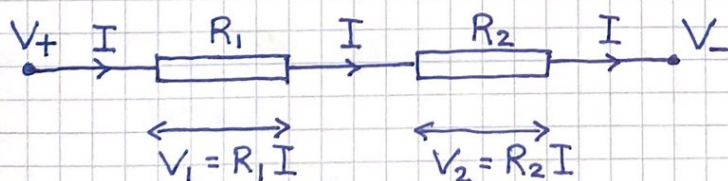
Er isolatorer med $n \approx 0$ ved svært lave temp. T .

Når T øker, frigjøres stadig flere elektroner, slik at σ øker og g avtar med økende T .

Anvendelser: Diode, transistor, solceller, lasere osv.

Kobling av motstander [OS2 10.2]

Seriekobling:



Lik strøm I gjennom motstander i serie.

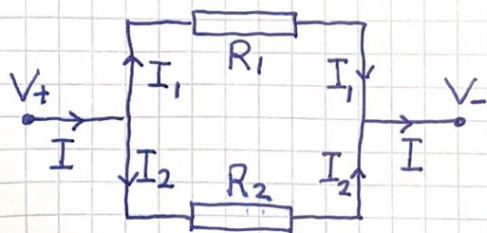
Total spenning: $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2) \cdot I$

$\Rightarrow$ Total motstand: $R = \frac{V}{I} = R_1 + R_2$

Med N koblet i serie: $R = \sum_{j=1}^N R_j$

Parallellkobling:

(71)



Lik spenning over R_1 og R_2 :

$$V = V_+ - V_- = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Total strøm:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

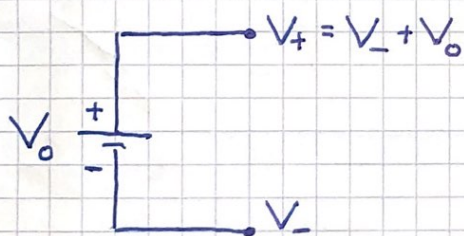
Total motstand: $R = V/I \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Med N koblet i parallell: $R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1} \quad [\Rightarrow G = \sum_{j=1}^N G_j]$

DC-kretser [052 10 (9)]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning

$$V_+ - V_- = V_0$$

mellom de to polene.

Eks: Kjemisk batteri

Solcelle

Mobil-lader

Kirchhoffs regler [OS2 10.3]

(72)

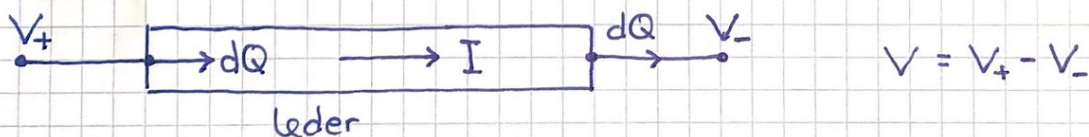
- K1: Pga ladningsbevarelse er netto strøm inn mot og ut fra et knutepunkt like store. Med (f.eks) $I_j > 0$ inn og $I_j < 0$ ut blir dermed

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt}$$

- K2: Pga energibevarelse er summen av alle potensialendringer (spenninger) rundt en lukket sløyfe lik null. Med (f.eks) $V_j > 0$ for potensialøkning og $V_j < 0$ for pot. reduksjon (spenningsfall) er

$$\sum_j V_j = 0 \quad \text{rundt alle sløyfer}$$

Elektrisk effekt [OS2 9.5]



$$\text{Effekt inn: } P_{\text{inn}} = \frac{dU_{\text{inn}}}{dt} = \frac{V_+ dQ}{dt} = V_+ I$$

$$\text{Effekt ut: } P_{\text{ut}} = \frac{dU_{\text{ut}}}{dt} = \frac{V_- dQ}{dt} = V_- I$$

$$\text{Effekttap i lederen: } P = P_{\text{inn}} - P_{\text{ut}} = (V_+ - V_-) \cdot I = V \cdot I$$

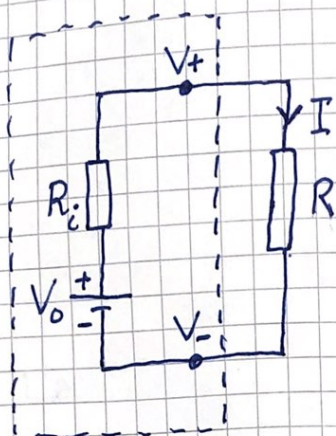
Hvis lederen oppfyller Ohms lov (dvs en ohmsk motstand):

$$V = R \cdot I \Rightarrow P = V \cdot I = R I^2 = \frac{V^2}{R}$$

(men $P = V \cdot I$ gjelder generelt)

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde

(73)



$$K2: V_0 - R_i I - R I = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

R_i = indre motstand i reell spenningskilde
(f.eks. et gammelt batteri)

$R_i = 0$ i ideell spenningskilde

Polspenning: $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$
når $R_i > 0$ og $I > 0$

Eks 2: Bestem total motstand og strømmene I_0 , I_1 og I_2 .



Løsning 2:

$$R_{tot} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = \underline{\underline{\frac{8R}{3}}}$$

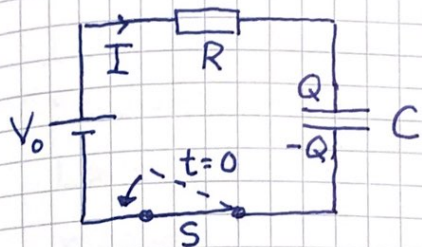
$$I_0 = V_0 / R_{tot} = \underline{\underline{\frac{3V_0}{8R}}}$$

Spennning over parallellkoblingen:

$$V_p = V_0 - 2RI_0 = \frac{1}{4}V_0$$

$$\Rightarrow I_1 = V_p / R = \underline{\underline{\frac{V_0}{4R}}}, \quad I_2 = V_p / 2R = \underline{\underline{\frac{V_0}{8R}}}$$

(slik at $I_1 + I_2 = I_0$)



Bestem $Q(t)$ og $I(t)$ når bryteren S ("switch") lukkes ved $t=0$, og $Q(t=0) = 0$.

(a) $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$

(b) $R = 10 \text{ M}\Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$

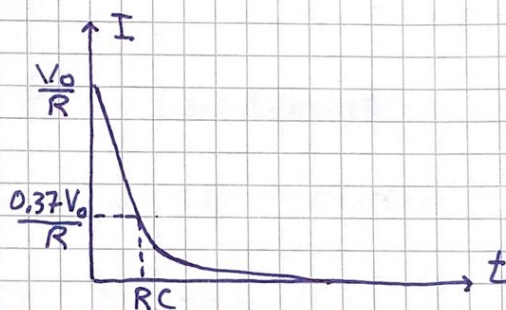
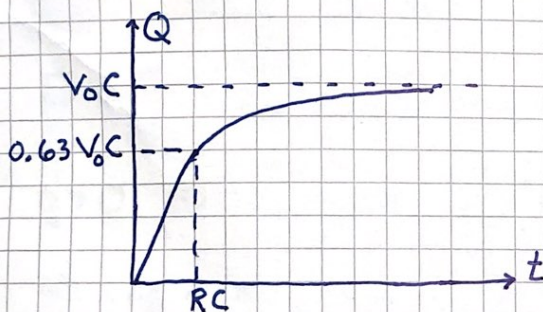
Løsn 3:

$$K2: V_0 - RI - Q/C = 0; \quad I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



$\tau = RC$ er kretsens tidskonstant, et mål for ca hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren

$$Q(\tau) = V_0 C \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0.63 V_0 C; \quad Q(3\tau) = 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e} = 0.37 V_0/R; \quad I(3\tau) = 0.05 V_0/R$$

(a) $\tau = 100 \Omega \cdot 10^{-7} \text{ F} = 10^{-5} \text{ s}$

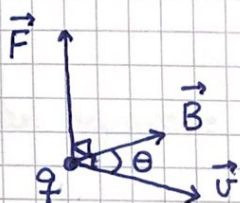
(b) $\tau = 10^7 \Omega \cdot 10^{-5} \text{ F} = 100 \text{ s}$

Magnetostatikk [052 11, 12]

(75)

Magnetisk kraft [052 11.2]

Strømmer og magneter omgir seg med et magnetfelt $\vec{B}$.
Ladning q med fart $\vec{v}$ i magnetfelt $\vec{B}$ påvirkes av magnetisk kraft:



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB \sin \theta, \quad \vec{F} \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

Enhet: $[B] = T$ (tesla); $1T = 10^4 G$ (gauss)

Eks: Krysset $\vec{E}$ og $\vec{B}$, hastighetsfilter



Notasjon:

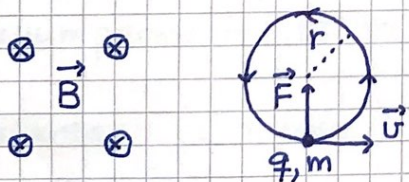
$\otimes$ inn i planet
 $\odot$ ut av planet

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e$ ned, $\vec{F}_m$ opp ($q < 0 \Rightarrow$ omvendt)

$\Rightarrow$ ingen avbøyning for partikler med $v = E/B$.

Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt [052 11.3]



Antar $\vec{v} \perp \vec{B}$ (Kun $v_{\perp}$ påvirkes av $\vec{B}$)
 $\Rightarrow F = qvB$

Tilført effekt: $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ Magn. kraft gjør aldri et arbeid.

Vi får uniform sirkelbevegelse med konstant $K = \frac{1}{2}mv^2$.

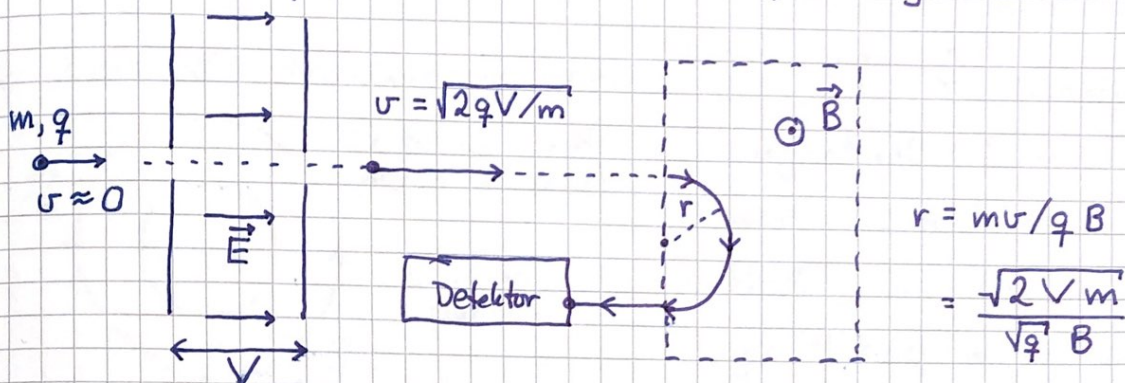
Spiralbane dersom $\vec{v}$ har en komponent $v_{\parallel}$ langs $\vec{B}$.

$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = qB/m = \text{syklotronfrekvensen}$$

Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; Øving 11]

76



Kan separere isotoper og generelt bestemme ionenes masse

Biot-Savarts Lov [OS2 12.1]



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

= magnetfelt i afstand $\vec{r}$ fra lederbit $d\vec{s}$ i strømsløyfe med strøm I

Totalt magnetfelt fra strømsløyfe:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Biot-Savarts Lov, 1820})$$

(Jf. Coulombs lov : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$)

Vakuumpërmeabiliteten : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$

Lysfarten (E.M. bølger) i vakuum : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

I stoff med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$:

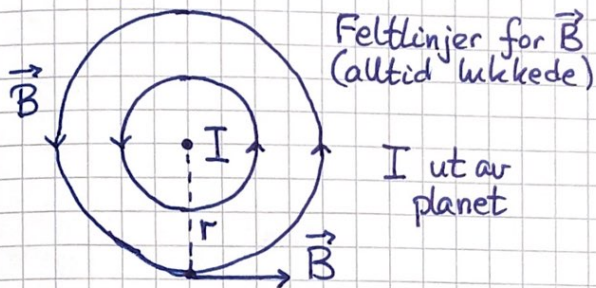
$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. For de fleste materialer er $\mu_r \approx 1$

(unntak: ferromagneter) slik at $v = c/n$ med

$n = \sqrt{\epsilon_r}$ = materialets brytningsindeks.

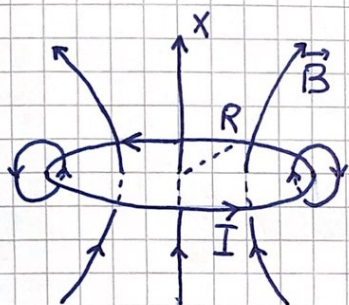
Eksempler [12.2, 12.4, 12.6 ; se notat for utledninger] (77)

1. Lang rett strømførende leder : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}$, retning tangentielt til sirkel med lederen i sentrum.



HHR: Tømmel langs I gir 4 øvrige fingre langs $\vec{B}$

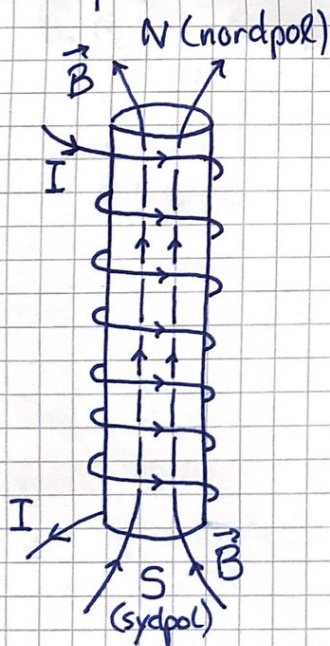
2. Sirkulær strømsløyfe : På sløyfas akse (her x-aksen) er



$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

HHR: 4 fingre langs I gir tommel langs $\vec{B}$ på sløyfas akse

3. Spole :



Antar ideell spole : Lang og tettviklet.

Med N viklinger på en lengde l og spolestrøm I :

Inni spolen : Uniformt felt med feltstyrke $B = \mu_0 n I$,

$n = N/l =$ antall viklinger pr lengdeenhet

Utenfor spolen : $B \approx 0$

(Ved spolens ender : $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$)

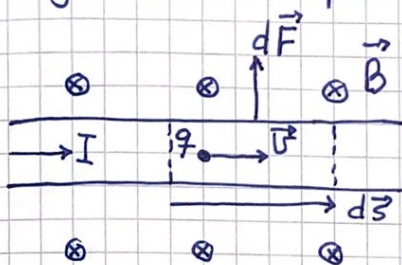
HHR som for enkel strømsløyfe.

Magnetens poler : $\vec{B}$ inni spolen fra sydpol S mot nordpol N.

Magnetisk kraft på strøm

[OS2 11.4]

(78)



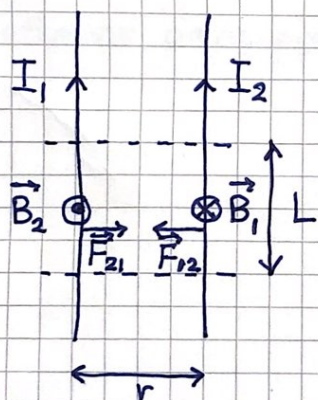
$d\vec{F} = N \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$ = kraft på N frie ladninger q med midlere driftsfart $\vec{v}$ langs lederen; N = antall frie ladninger på lengden ds

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N \cdot q}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft på hele lederen: $\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$

Rett leder med lengde L i uniformt $\vec{B}$ -felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer [OS2 11.4]



$$B_j = \frac{\mu_0 I_j}{2\pi r} \quad (j=1,2)$$

= feltstyrke i avstand r fra leder j

Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

Pr lengdeenhet: $f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

Hvis to strømmer i motsatt retning: Frastøtende kraft.

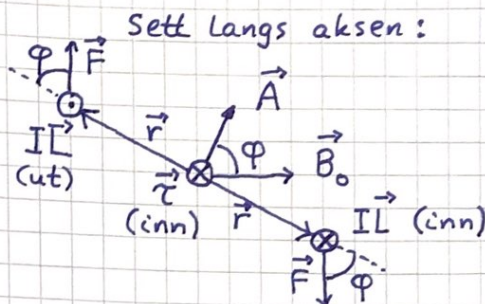
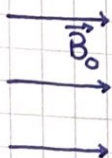
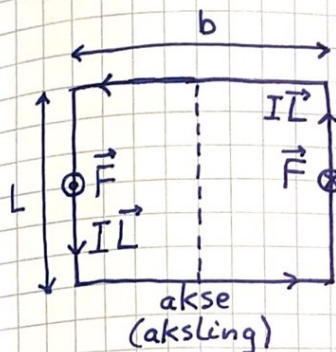
Def. av 1A (inntil 20.05.2019):

Hvis $I_1 = I_2$ og $r = 1\text{ m}$ gir $f = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$,

er $I_1 = I_2 = 1\text{ A}$

Eks 2: Dreiemoment på strømsløyfe i ytre felt $\vec{B}_0$

(79)



Sett langs akse:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}_0 ; \vec{B}_0 \perp \vec{L} \Rightarrow F = ILB_0$$

$$\vec{A} = A\hat{n} = bL\hat{n} ; \hat{n} = \text{enhetsvektor} \perp \text{strømsløyfa}$$

$$|\vec{\tau}| = |\sum \vec{r} \times \vec{F}| = |2\vec{r} \times \vec{F}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\phi = IAB_0 \sin\phi$$

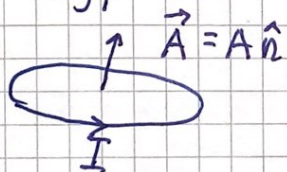
$$= |I\vec{A} \times \vec{B}_0| \Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}_0$$

Spole med N viklinger: $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}_0$

Dette er prinsippet for en likestrømsmotor (DC-motor)

Magnetisk dipol og dipolmoment [OS2 11.5]

En strømsløyfe er en magnetisk dipol:



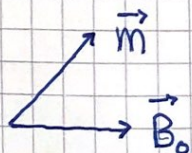
HRR gir retning på $\vec{A}$

Magn. dipolmoment $\stackrel{\text{def}}{=} \text{strøm} \cdot \text{omsluttet areal}$

$$\vec{m} = I\vec{A} ; \text{enhet: } [m] = \text{Am}^2$$

Spole med N viklinger: $\vec{m} = NI\vec{A}$

Dipol i ytre felt $\vec{B}_0$:



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

If. $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$

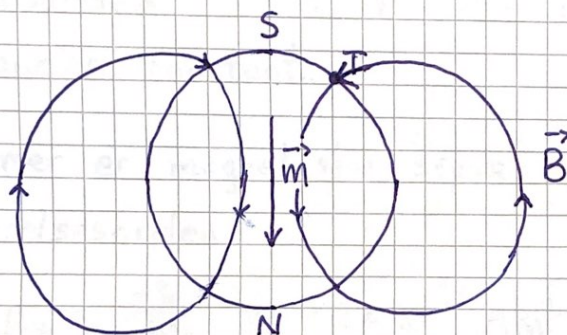
$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(s. 61)

Eks 1: Bestem maksimalt dreiemoment på en spole med 3200 viklinger rundt et areal $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ og spolestrøm 6.0 A , i et ytre felt 2.5 T . (80)

Løsn 1: $m = NIA = 3200 \cdot 6.0\text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2 = 7.68\text{ Am}^2$
 $\tau_{\text{max}} = m B_0 = 7.68\text{ Am}^2 \cdot 2.5\text{ T} \approx \underline{\underline{19\text{ Nm}}}$

Eks 2: $\vec{B}$ i Trondheim (63.45°N , 10.42°Ø)
 Jorda er en magnetisk dipol, med $m \approx 8 \cdot 10^{22}\text{ Am}^2$



Med vår definisjon av magnetiske poler ligger magnetisk N nær geografisk S, og omvendt.

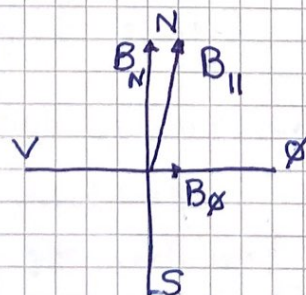
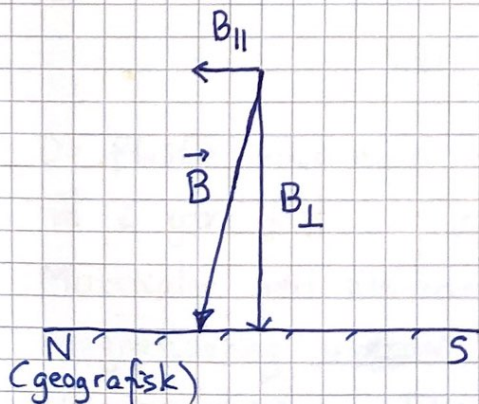
Trondheim 31.10.24 (World Magnetic Model; [ngdc.noaa.gov](https://www.ngdc.noaa.gov))

$B = |\vec{B}| = 52241 \pm 145\text{ nT}$; $dB/dt = 48\text{ nT/år}$

$B_{\perp} = 50449 \pm 157\text{ nT}$

$B_{\parallel} = 13567 \pm 128\text{ nT}$

$B_N = 13515 \pm 131\text{ nT}$, $B_{\text{Ø}} = 1184 \pm 94\text{ nT}$

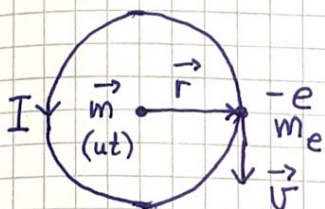


De magn. polene flytter seg flere km pr år.

Magnetisme [OS2 12.7]

(81)

Atomær magnetisk dipol:



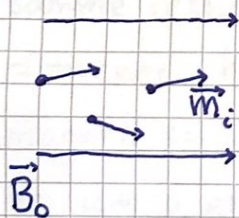
$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; \quad A = \pi r^2 \\ \Rightarrow m &= IA = \frac{1}{2} e v r \\ L &= |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} I &= \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; \quad A = \pi r^2 \\ \Rightarrow m &= IA = \frac{1}{2} e v r \\ L &= |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{aligned}} \right\} \Rightarrow m = \frac{e}{2m_e} \cdot L$$

Kvantemekanikk viser at dreieimpuls L og spinn S for elektroner og andre elementærpartikler er av størrelsesorden $\hbar = h/2\pi$, der $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js er Plancks konstant.

$\Rightarrow$ Atomer er magnetiske dipoler med dipolmoment av størrelsesorden

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

I et ytre felt $\vec{B}_0$ gir dreiemomentet $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ en tendens til innretting av $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$:



Materialets magnetisering er def. som magn. dipolmoment pr volumenhet:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V ; \quad [M] = \text{A/m}$$

[Jf. polarisering $\vec{P}$ s. 61]

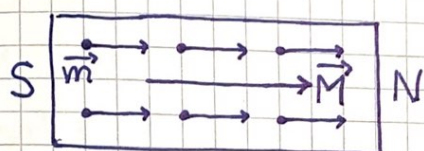
De fleste materialer får ubetydelig innretting av atomære $\vec{m}$ i ytre felt $\vec{B}_0$; de er paramagnetiske. Eks: Al, Na, Mg... Materialer med atomære $\vec{m} = 0$ får induisert en svak magnetisering motsatt rettet det ytre feltet $\vec{B}_0$; de er diamagnetiske. Eks: Cu, Au, Hg, vann, tre, plast,...

Ferromagnetisme

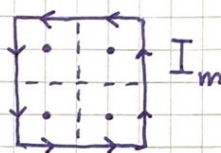
(82)

Noen få grunnstoffer, Fe, Ni, Co, Gd, og endel legeringer, f.eks. $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (neodym-magnet) har atomer som vekselvirker med sine naboatomer slik at alle atomære $\vec{m}$ blir mest stabilt, dvs lavest energi. Da er materialet ferromagnetisk.

Permanentmagneter har parallelle $\vec{m}$ i hele materialet:

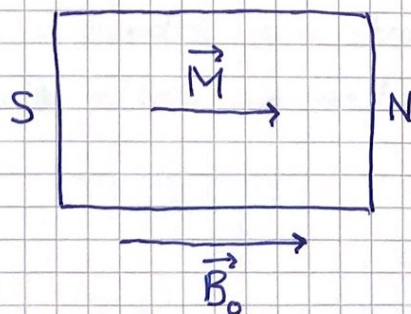
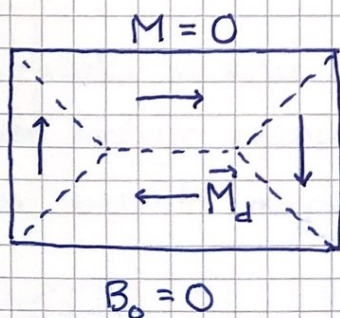


Sett forfra,
med N ut
av planet:



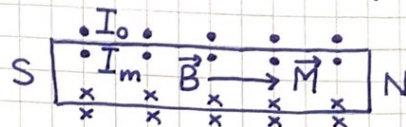
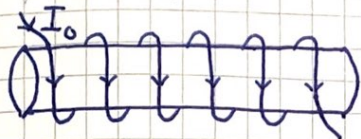
Vi får en bundet magnetiseringsstrøm I_m i overflaten, mens indre strømmer kansellerer! Jf. industert overflateladning på en isolator i ytre felt $\vec{E}_0$ (s.62).

Umagnetiske ferromagneter, f.eks. stål, har mange små domener, dvs områder med lineær utstrekning ca $1 - 100 \mu\text{m}$. I et gitt domene peker alle atomære $\vec{m}$ i samme retning og gir magnetisering $\vec{M}_d$. Men ulike domener har $\vec{M}_d$ i ulike retninger slik at den totale magnetiseringen blir $\vec{M} = \sum \vec{M}_d \approx 0$. Dvs, materialet er umagnetisk, men blir magnetisk i et ytre felt $\vec{B}_0$ pga innretting av de ulike $\vec{M}_d$ langs $\vec{B}_0$:



Eks: Spole med jernkjerne. Lineær respons.

(83)



I_0 og I_m er hhv spolestrøm og magnetiseringsstrøm pr vikling
 $B_0 = \mu_0 n I_0$ og $B_m = \mu_0 n I_m$ er bidragene til magnetfeltet
 inni spolen pga hhv I_0 og I_m , slik at totalt magnetfelt
 inni spolen blir $B = B_0 + B_m = \mu_0 n (I_0 + I_m)$. Vi antar lineær
 respons, dvs at B_m er prop. med B_0 , slik at B blir prop. med
 B_0 . Vi kan da skrive $B = \mu_r B_0$, der μ_r er materialets
 relative permeabilitet. Med $B_0 = \mu_0 n I_0$ har vi dermed

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I_0 = \mu n I_0$$

der $\mu = \mu_r \mu_0$ er materialets permeabilitet. Noen tallverdier:

	vakuum	Al	Cu	Fe 99.8%	Rustfritt stål
μ_r	1	1.000022	0.999994	5000	750 - 1800

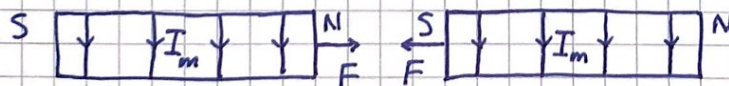
Tallempeksel, spole med jernkjerne:

$N = 1600$, $l = 5.0$ cm, $I_0 = 1.0$ A, $\mu_r = 1600$. Finn B og I_m .

Løsning: $B = \mu_r \mu_0 n I_0 = 1600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1600/0.050) \cdot 1.0$ T = 64 T

$\mu n I_0 = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m \Rightarrow I_m = (\mu_r - 1) I_0 \approx \mu_r I_0 = \underline{\underline{1600 \text{ A pr vikling}}}$

Eks 2: Nettokraft mellom to magneter



Parallell strømmer nærmere hverandre enn strømmer
 med motsatt retning gir netto tiltrekning mellom
 to motsatte magn. poler.

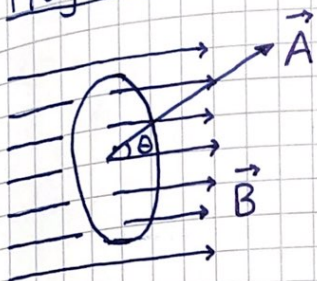
Elektrodynamikk

[OS2 13-15]

(84)

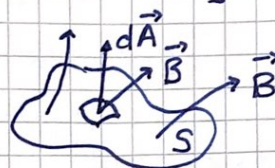
Magnetisk fluks

[OS2 13.1]



$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta =$ magnetisk fluks gjennom flate med areal A og vinkel θ mellom $\vec{B}$ og $\vec{A}$

Generelt: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

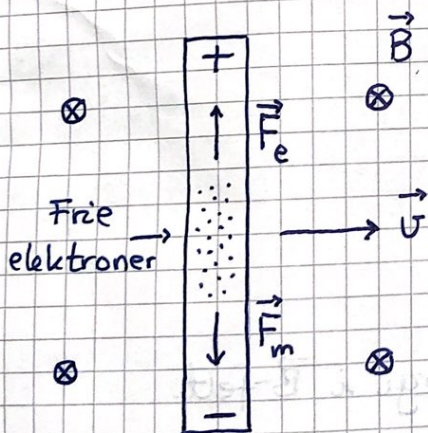


Enhet: $[\Phi] = T \cdot m^2 = Wb$ (weber)

Faradays induksjonslov

[OS2 13.1]

La oss se på en leder med lengde l som trekkes med fart $\vec{v}$ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$:

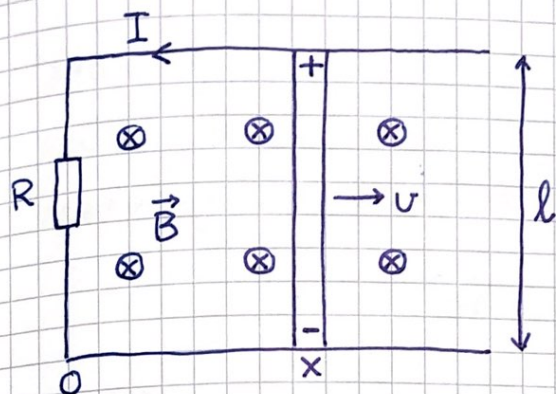


$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ på frie elektroner i ledere $\Rightarrow$ netto negativ ladning nederst og netto positiv ladning øverst. Da er det induisert et elektrisk felt $\vec{E}$ i ledere, og en tilhørende induisert elektromotorisk spenning $\Delta V = E \cdot l$ over ledere.

I likevekt er $F_e = F_m \Rightarrow e \cdot E = evB \Rightarrow E = vB$

$$\Rightarrow \Delta V = vBl$$

Denne spenningen kan nå drive en strøm i en lukket krets.



$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl$$

$$= \frac{d}{dt} (xBl) = \frac{d}{dt} (B \cdot A)$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{d\Phi}{dt}$$

Faradays induksjonslov:

$$\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Endringen i omsluttet magn. fluks pr tidsenhet tilsvarer induert spenning i lukket sløyfe.

Lenz' lov [OS2 13.2]

Indusert strøm I skaper felt $\vec{B}_I$ og omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ som motvirker påtvinget fluksendring $\Delta\Phi$.

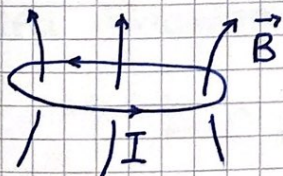
Eks: I figuren ovenfor påtvinges en fluksøkning inn i planet. Da går strømmen I mot klokka slik at tilhørende omsluttet fluks Φ_I er positiv ut av planet.

Induktans og induksjon [OS2 14.1, 14.2]

Selvinduktans: Biot-Savarts lov $\Rightarrow \vec{B}$ prop. med I

$\Rightarrow$ Omsluttet fluks Φ prop. med I

$\Rightarrow$ Vi kan skrive: $\Phi = L \cdot I$



L = systemets (selv-)induktans

$[L] = \text{Wb/A} = \text{H (henry)}$

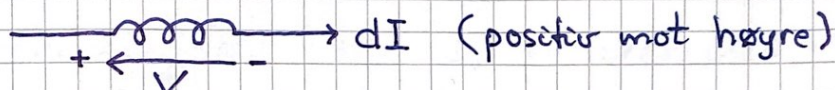
Selvinduksjon: Hvis I endrer seg med tiden, endres Φ også med tiden. Da induseres det en spenning i systemet/sløyfa/kretselementet,

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

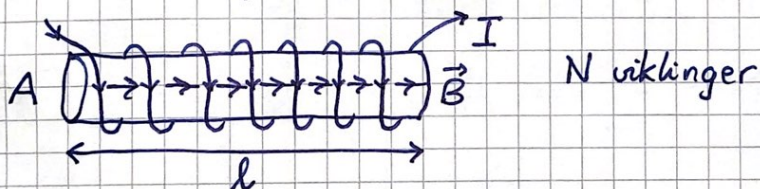
Induktans (typisk en spole) som kretselement:



Retningen (fortegnet) på induert spenning V er slik at strømindringen motvirkes (Lenz' lov):



Eks: Ideell spole



$$B = \mu_0 n I = \mu_0 (N/l) I$$

$$\Phi = NBA = (\mu_0 N^2 A / l) \cdot I$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \mu_0 N^2 A / l$$

Med ferromagnetisk kjerne: $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$

$$\Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l$$

TFY4125 21/5 - 24

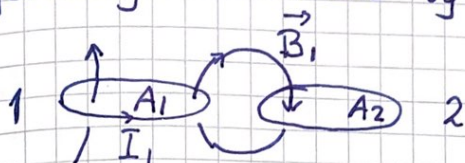
(35) $N = 3200$, $I = 65 \text{ mA}$, $\mu_r = 1350$. I_m pr vikling? $I_m \approx \mu_r I_0 = \underline{88 \text{ A}}$
(se s. 83)

(36) $l = 20 \text{ cm}$, $A = 4.0 \text{ cm}^2$. $L = ?$

$$L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l = \underline{35 \text{ H}}$$

Gjensidig induktans og induksjon:

(87)



I_1 skaper felt $\vec{B}_1$, og dermed fluks Φ_2 omsluttet av sløyfe 2.
Og omvendt!

Siden $\vec{B}_1$ er prop. med I_1 , blir Φ_2 også prop. med I_1 :

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

Og omvendt, med strøm I_2 i sløyfe 2: $\Phi_1 = M_{12} I_2$

Det følger av Biot-Savarts lov at $M_{12} = M_{21} = M$ som er sløyfenes gjensidige induktans.

Enhet: $[M] = [L] = H$ (henry)

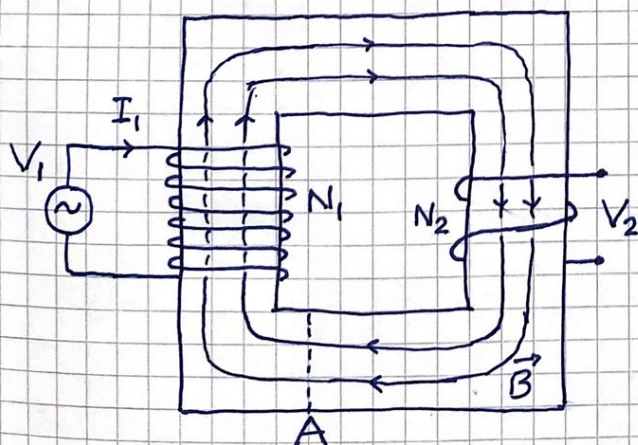
Gjensidig induksjon: Hvis I_1 varierer med tiden t , blir Φ_2 også tidsavhengig. Da induseres en spenning i sløyfe 2:

$$V_2 = -d\Phi_2/dt = -M dI_1/dt$$

Og omvendt:

$$V_1 = -d\Phi_1/dt = -M dI_2/dt$$

Eks: Transformator



$I_1(t)$ skaper $\vec{B}(t)$ inni den ferromagnetiske "ringformede" kjernen.

$$\Phi_1(t) = N_1 B(t) A$$

$$\Phi_2(t) = N_2 B(t) A$$

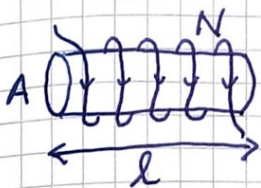
$$V_1(t) = \dot{\Phi}_1 = N_1 A \dot{B}$$

$$V_2(t) = \dot{\Phi}_2 = N_2 A \dot{B}$$

$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$; amplituden på $V_1(t)$ kan transformeres ned ($N_2 < N_1$) eller opp ($N_2 > N_1$)

Energi i $\vec{B}$ -felt [os2 14.3]

(88)



Å øke strømmen i en spole fra $i=0$ til $i=I$ krever at det gjøres et arbeid, for å overvinne den induserte motspenningen $v = L \cdot di/dt$.

$$dU = P \cdot dt = v \cdot i \cdot dt = L \cdot (di/dt) \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di$$

er tilført energi når strømmen økes fra i til $i+di$

$$\Rightarrow U = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2 = \text{total tilført energi}$$

Antar ideell spole: $L = N^2 \mu_0 A / l$; $I = \frac{B}{\mu_0 N / l}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 \mu_0 A}{l} \cdot \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \cdot (A \cdot l)$$

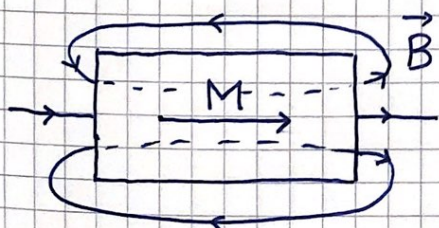
Her er $A \cdot l$ volumet inni spolen, der $B \neq 0$. ($B=0$ utenfor)

Dermed: $u_B = \frac{B^2}{2 \mu_0} = \text{energi pr volumenhet i } \vec{B}\text{-felt}$

Med både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i et område, f.eks. EM-bølge:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \text{energi pr volumenhet i et elektromagnetisk felt}$$

Permanentmagnet vs umagnetisk ferromagnet:



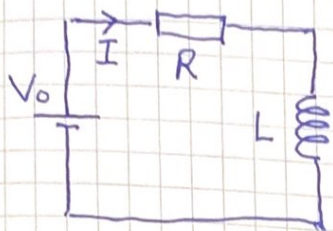
$B=0$

Større magn. feltenergi for permanentmagneten, men lavere vekselvirkningsenergi pga samtlige parallelle $\vec{m}$.
 $\Rightarrow$ "Konkurransen" mellom de to energibidragene.

Avsluttende eksempler [OS2 14, 15]

(89)

Eks 1: RL-krets

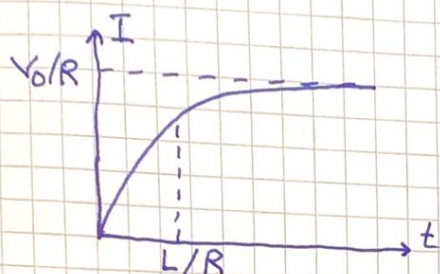


V_0 kobles til ved $t=0$

$$K2: V_0 - RI - L dI/dt = 0$$

Samme lign. for $I(t)$ som for $Q(t)$ i RC-kretsen (s 74)

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga induert motspenning i spolen tar det en viss tid før vi oppnår maks. strøm V_0/R .

Eks 2: Vannkraft og vekselspenning

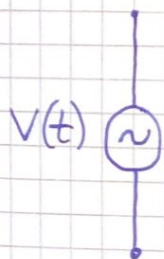
Rennende vann (evt vind) driver en turbin som roterer en spole med N viklinger og tverrsnitt A i et $\vec{B}$ -felt, med vinkelfart ω . Gir tidsavhengig omsluttet fluks

$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

og dermed induert vekselspenning (AC: alternating current)

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad ; \quad V_0 = NBA\omega$$

Kretssymbol:

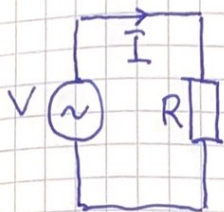


$$\text{Frekvens: } f = \omega / 2\pi$$

$$\text{Europa: } f = 50 \text{ Hz}$$

Eks 3: Effektivverdier

(90)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0 / R$$

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

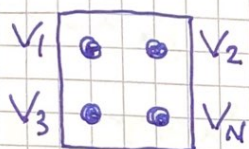
$$\text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \text{ da } \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

Uttrykker $\langle P \rangle$ ved effektivverdier / rms-verdier:

$$\langle P \rangle = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} ; V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} ; I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Kontakten i veggen: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: 3-fase og 400 V



$$V_1 = V_0 \sin \omega t$$

$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

$$V_N = 0$$

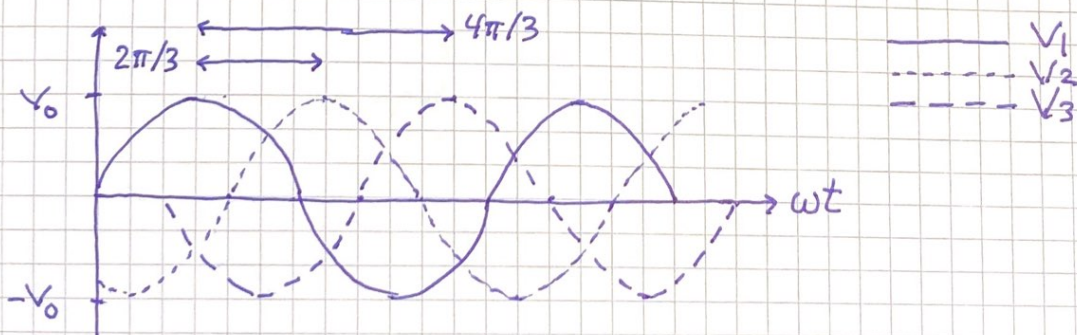
("nøytral-leder")

Siden $\sin a - \sin b = 2 \cos(\frac{a+b}{2}) \sin(\frac{a-b}{2})$ har vi

$$V_{21} = V_2 - V_1 = 2 V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

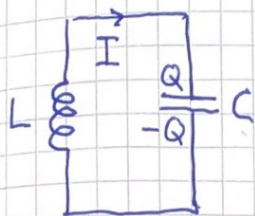
$$\Rightarrow (V_{21})_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3} V_0}{\sqrt{2}} = 400 \text{ V} \text{ når } V_0 = 325 \text{ V}$$

Tilsvarende for V_{32} og V_{31} .



Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

(91)



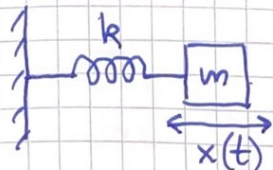
$$K2: -L\dot{I} - Q/C = 0; I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Med $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$ blir da:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t; I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$$

Mek. analogi:



$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Med $x = x_0$ og $v = 0$ ved $t = 0$:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t; v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

Analoge størrelser i de to systemene:

$$Q \leftrightarrow x, I \leftrightarrow \dot{x}, L \leftrightarrow m, C \leftrightarrow 1/k$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$$

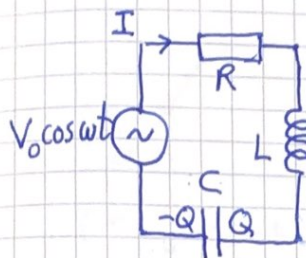
$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} Q^2 / C = \text{— " — } \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$$

Begge systemer er konservative, uten tap (dissipasjon) av energi:

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 &= \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L \underbrace{\omega_0^2 Q_0^2}_{= \frac{1}{C}} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant} \end{aligned}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

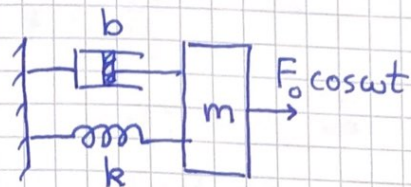
(92)



$$K2: V_0 \cos \omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$$

Mek. analogi: (5.42-44)



$$N2: F_0 \cos \omega t - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

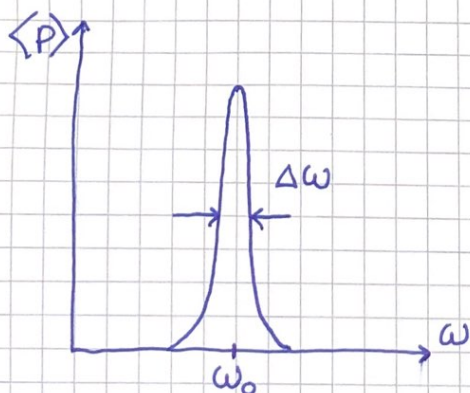
Analoge størrelser: $b \leftrightarrow R$, $F_0 \leftrightarrow V_0$

Må få $Q(t)$ i el.krets på samme form som $x(t)$ i mek.system:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi); \quad Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}; \quad 2\gamma = \frac{R}{L}$$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$

$$\langle P \rangle(\omega) = \langle V(t)I(t) \rangle; \quad \text{På resonans } (\omega = \omega_0): \langle P \rangle = \frac{V_0^2}{2R}$$



Halverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$ (FWHM)

Oscillatorens Q-faktor (kvalitetsfaktor):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$