

Svingninger [051 15]

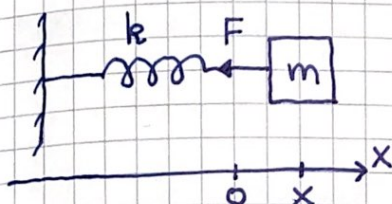
(38)

Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomene i molekyler og krystaller.

Ladning og strøm i elektriske kretser.

Harmonisk oscillator [051 15.1]



x = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt, $F = 0$

$x > 0$: strukket fjær, $F < 0$

$x < 0$: sammenpresset fjær, $F > 0$

Hookes lov: $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

$$\text{N2: } -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ med } \omega_0^2 = k/m$$

Løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

evt. $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

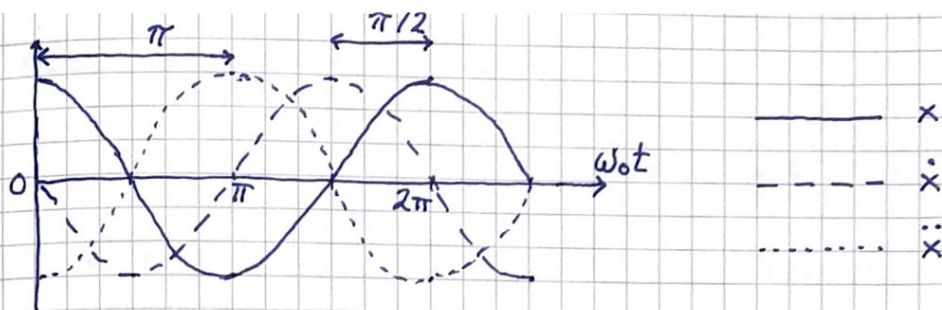
A og φ , evt. B og C , fastlegges med to startbetingelser, f.eks. kjennskap til $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Anta $\varphi = 0$; da er:

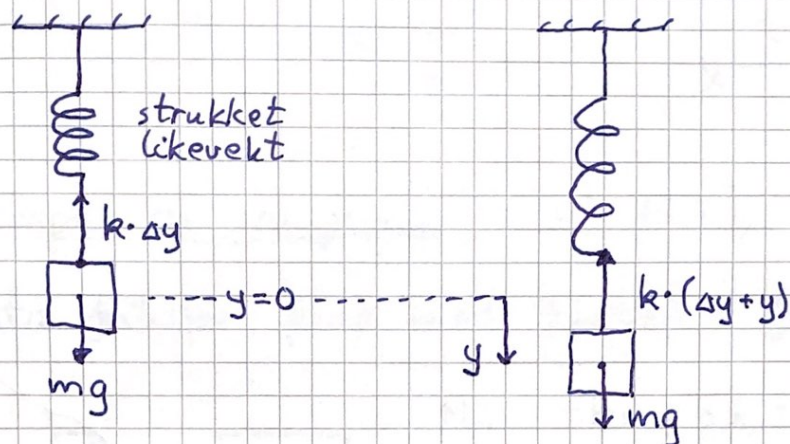
$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$$



Masse og fjær i tyngdefeltet:



$$N1: k \Delta y = mg \\ \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y} \\ \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt med uendret frekvens,
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2]

Anta $\varphi = 0$ og $x(t) = A \cos \omega_0 t$

Potensiell energi:

$$U = -\int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

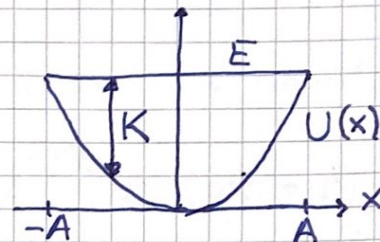
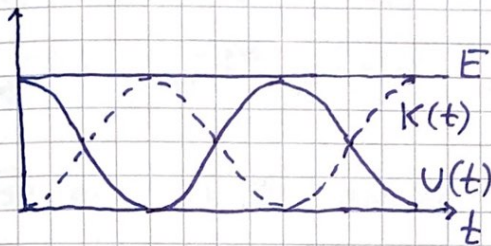
$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mekanisk energi:

(40)

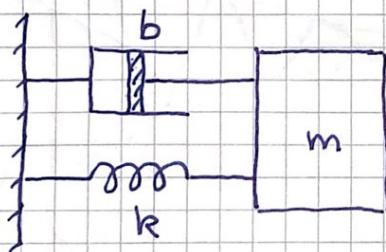
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2, \text{ uavhengig av } t$$

$\Rightarrow$ Fjærkraften $F(x) = -kx$ er konservativ



Dempet fri svingning [OS1 15.5]

Anta friksjon prop. med farten: $f = -b\dot{x}$



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m; \omega_0^2 = k/m$$

Ser at løsningen må være på formen $\exp(-\alpha t)$.

Innsetting gir:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\text{dvs } \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma$

$$x(t) = (A + B \cdot t) \exp(-\gamma t)$$

Svakeste damping som ikke gir svingninger.

Bra i f.eks. støtdempere.

Overkritisk damping: $\gamma > \omega_0$

(41)

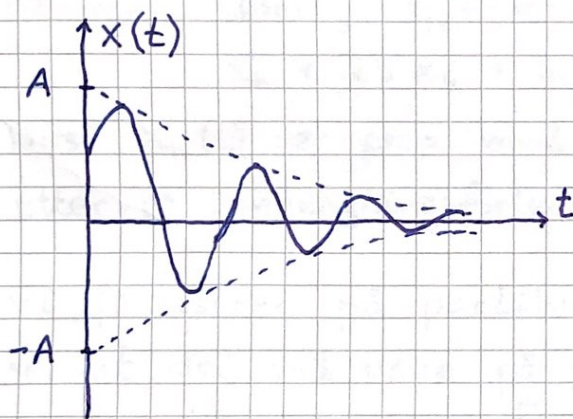
$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t) ; \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Underkritisk damping: $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$e^{-\alpha t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\gamma t} (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$$

Generell reell løsning: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$,
dvs harmonisk svingning med avtagende amplitude $A e^{-\gamma t}$



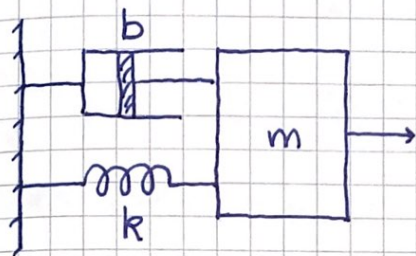
Omhyllningskurver:

$$\text{-----} \pm A e^{-\gamma t}$$

Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ avgjør hvor lenge svingeberegelsen varer

Svak damping: $\gamma \ll \omega_0$

$$\Rightarrow \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$



Antar harmonisk ytre kraft:
 $F(t) = F_0 \cos \omega t$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen Løsning oppfyller homogen ligning:

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Dvs, $x_h(t)$ er prop. med $\exp(-\gamma t)$ og "dør ut" etter et innsvingningsforløp med ranghet ca $3\tau = 3/\gamma$.

Vi fokuserer på partikulærløsningen $x_p(t)$, og vi ser at den må være på formen

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ = A(\omega) \{ \sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega) \}$$

Innsetting gir 2 ligninger, hhv

$$\sin \omega t \cdot f_1(A, \varphi) = 0 \quad \text{og} \quad \cos \omega t \cdot f_2(A, \varphi) = 0$$

hvoretter $f_1 = 0$ og $f_2 = 0$ fastlegger $A(\omega)$ og $\varphi(\omega)$:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right]$$

Resonans: Med svak demping, $\gamma \ll \omega_0$, og ytre kraft med frekvens $\omega \approx \omega_0$ blir amplituden

A stor!

Eks: Hva er midlere tilført (og tapt) effekt når $\omega = \omega_0$?

(43)

Løsn:

Fra før: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Her: $P(t) = F(t) \cdot \dot{x}(t)$.

Middelverdi over en periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\omega_0$:

$$\langle P \rangle = \langle F \cdot \dot{x} \rangle$$

$$\varphi(\omega_0) = \arctan 0 = 0$$

$$A(\omega_0) = F_0 / (m \cdot 2\gamma \omega_0) = F_0 / b \omega_0$$

$$\dot{x}(t) = \omega_0 A(\omega_0) \cos \omega_0 t = (F_0 / b) \cos \omega_0 t$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \langle F_0 \cos \omega_0 t \cdot \frac{F_0}{b} \cos \omega_0 t \rangle = \frac{F_0^2}{b} \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle$$

Vi har $\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t = 1$, og må ha

$$\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle, \text{ slik at } \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = F_0^2 / 2b$$

Ved stasjonære forhold må dette tilsvare midlere tapt effekt pga friksjon:

$$\langle P_f \rangle = \langle -b \dot{x} \cdot \dot{x} \rangle = -b \cdot \left(\frac{F_0}{b} \right)^2 \cdot \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = -F_0^2 / 2b$$

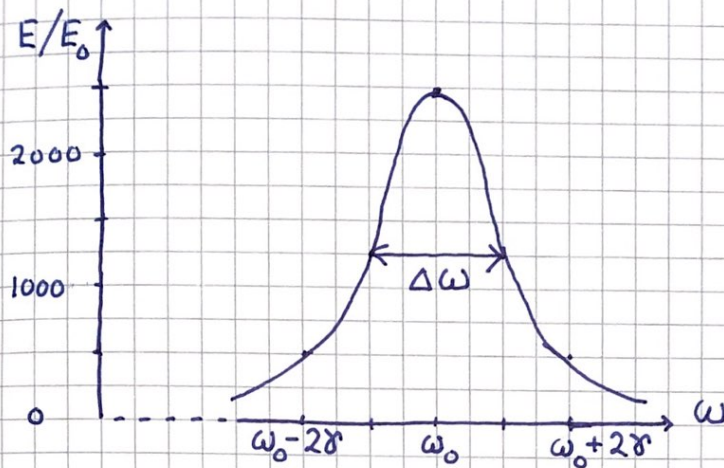
Eks 2: Bestem og plott oscillatorens energi E som funksjon av den ytre kraftens frekvens ω , for svak damping $\gamma = \omega_0 / 100$.

Løsn:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$\text{med } E_0 = F_0^2 / 2k$$

(44)



$$E(\omega_0) = 2500 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm \delta) = 1250 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm 2\delta) = 500 E_0$$

Resonanskurvens halvverdbredde
(FWHM: Full Width at Half Maximum):

$$\Delta\omega = 2\delta = b/m$$

Oscillatorens Q-faktor (quality factor):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Stærk demping $\Rightarrow Q \gg 1$, dvs. smal resonanskurve.

Her: $\Delta\omega = 2\delta = \omega_0/50$

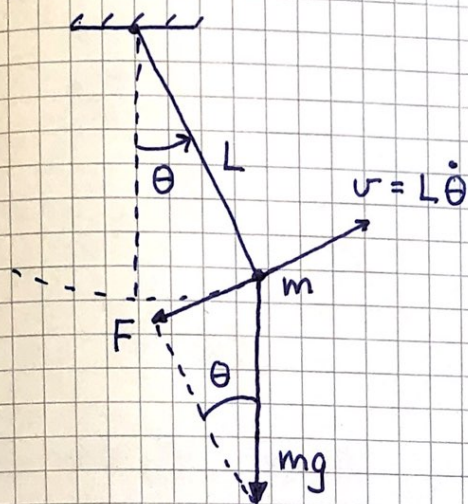
$$\Rightarrow Q = 50$$

Pendler

[OS1 15.4]

(45)

Matematisk pendel: Punktmasse i masseløs stang/snor.



N2 || sirkelbanen:

$$F = ma$$

med

$$F = -mg \sin \theta$$

$$a = \ddot{r} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Antar små utsving omkring likevekt:

$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Foucaultpendelen i Realfagbygget.

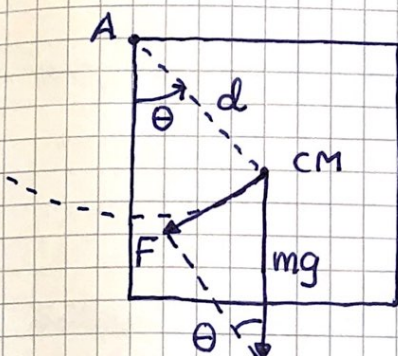
$L = 25\text{m}$. Hva er perioden?

Løsn:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g} \approx \underline{\underline{10\text{s}}}$$

(46)

Fysisk pendel: Stivt legeme som svinger om akse A i avstand d fra CM.



Masse m .

Tregghetsmoment mhp A: I

Dreiemoment mhp A:

$$\tau = -F \cdot d = -mgd \sin \theta$$

N2, rotasjon om A: $\tau = I \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Anta små utsving omkring likevekt: $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = mgd/I$$

Eks: [TFY 4125 21.05.24]



Harmonisk svingning om akse A halvveis mellom hjørnet og CM.

$$M = 0.50 \text{ kg}, \quad L = 50 \text{ cm}, \quad I_0 = ML^2/6$$

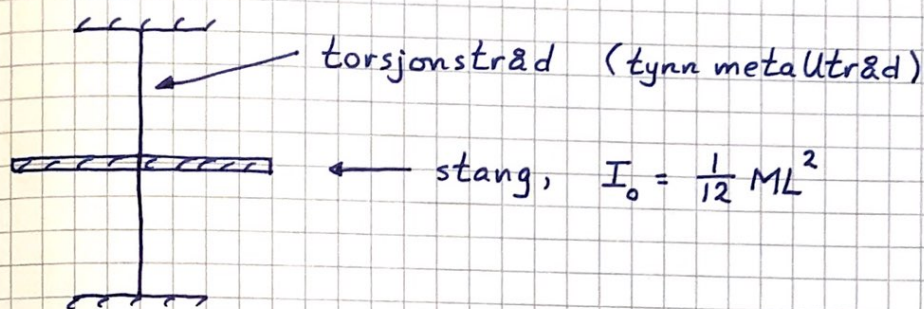
Hva er svingetida?

$$\text{Løsn: } I = I_0 + Md^2 \quad ; \quad d = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} L = L/2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow I = ML^2 \left(\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right) = ML^2 \cdot \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{I/Mgd} = 2\pi \sqrt{7\sqrt{2}L/12g} \approx \underline{\underline{1.3s}}$$

Torsjionspendel:



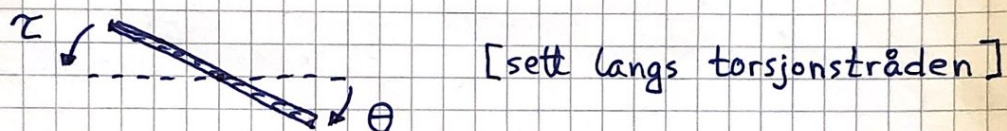
Tråden vris når stanga dreies en vinkel θ .

⇒ Tråden virker på stanga med dreiemoment prop. med θ ,

$$\tau = -\kappa \theta,$$

med retning tilbake mot likevekt.

κ = trådens torsjonsstivhet ; $[\kappa] = \text{N} \cdot \text{m}$



N2, rotasjon om trådaksen:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}$$

Eks: $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$, $T = 0.8 \text{ s}$. Hva er κ ?

Løsn:

$$\begin{aligned} \kappa &= I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \cdot 0.050 \text{ kg} \cdot (0.11 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{0.8 \text{ s}}\right)^2 \\ &\approx \underline{\underline{0.003 \text{ Nm}}} \end{aligned}$$

- Newtons andre lov: $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\mathbf{f} = -k\mathbf{v}$ Luftmotstand (stor v): $\mathbf{f} = -Dv^2\hat{\mathbf{v}}$
- Tyngdepunkt: $\mathbf{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{r}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \mathbf{F}_i = 0$ $\Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$
- Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_b + \mathbf{L}_s = \mathbf{R}_{CM} \times M\mathbf{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$
- Trehetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
 Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
 Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellaksesteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $\mathbf{g} = \mathbf{F}/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
 Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
 Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
 $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
 Underkritisk damping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
 Overkritisk damping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 Kritisk damping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
 amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
 halvverdbredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$