

Materialers elektriske egenskaper

(60)

Ledere / Metaller

[OS2 7.5 (6.4)]

Har frie elektroner, typisk 1 eller 2 pr atom, som settes i bevegelse dersom $\vec{E} \neq 0$, pga N2: $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$.

Dermed, for metaller i elektrostatisk likevekt:

- $E = 0$ inni et metall.
- All nettoladning ligger på overflaten.
- På overflaten er $E_{||} = 0$ og $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ ($\sigma = Q/A$)
- Metall i likevekt er et ekvipotensial, da $E = 0$ inni og $E_{||} = 0$ på overflaten, slik at $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ for enhver $d\vec{s}$
- Metall med hulrom har $E = 0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

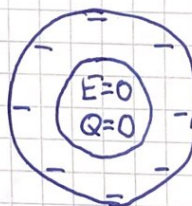
Bevis:



Kompakt metall

Fjern nøytral
bit inni.

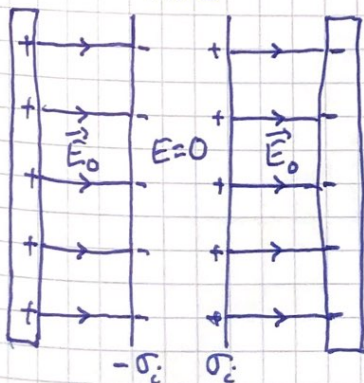
Verken ladning
eller felt endres!



Metall med hulrom

Eks 1: Hva blir industert overflateladning $\pm\sigma_i$ på ei metallskive på tvers i et uniformt ytre felt $E_0 = 1.0 \text{ kV/m}$?

Løsn 1: metall-
skive



Ytre felt: $\vec{E}_0$

Felt pga $\pm\sigma_i$: $\vec{E}_i$

$E_i = \sigma_i/\epsilon_0$ inni skiva; $E_i = 0$ utenfor

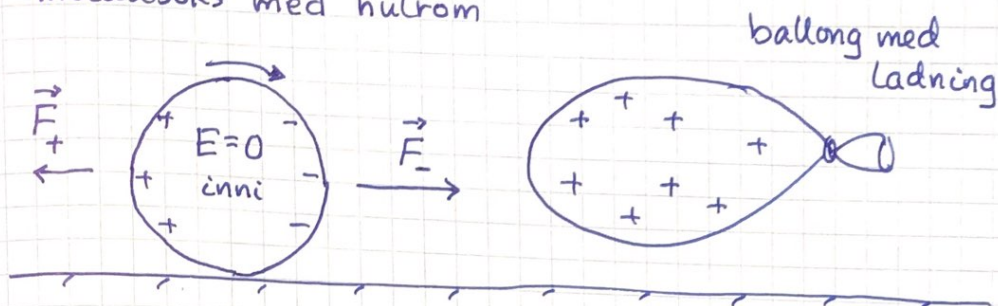
Totalt felt inni skiva: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$

$\Rightarrow E_i = E_0$

$\Rightarrow \sigma_i = \epsilon_0 E_0 = 8.85 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$
 $= 8.85 \text{ nC/m}^2$

Eks 2: Faradaybur metallboks med hulrom

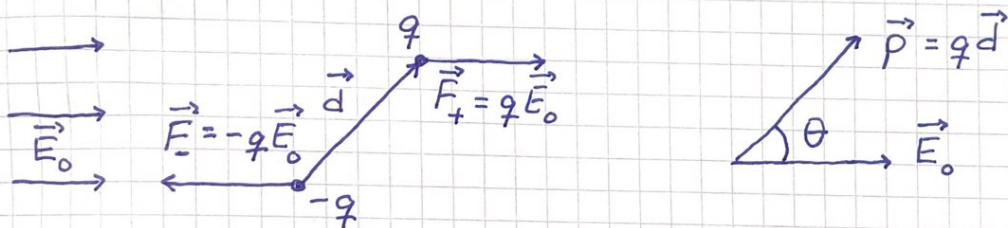
69



Netto tiltrekning pga kortest avstand mellom ballongens positive ladning og boksens negative ladning.

Isolator / Dielektrikum [OS2 8.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som gir polarisering i et ytre felt $\vec{E}_0$. Vi ser på en molekylær dipol:

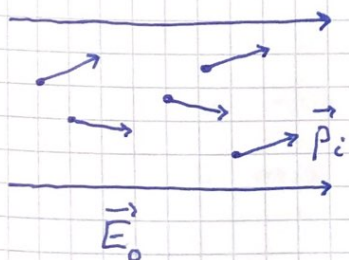


Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ (her: inn i planet)

$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = pE_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0| \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Dipolens pot. energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta \Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0}$

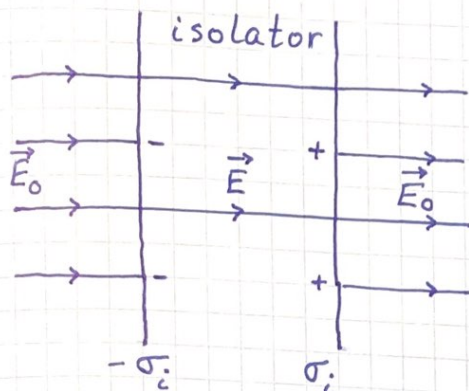
$\Rightarrow$ Dipolene får en tendens til å peke langs det ytre feltet:



polarisering $\stackrel{\text{def}}{=} \text{dipolmoment pr volumenhett}$
 $\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$; $[P] = C/m^2$

Nettoeffekt: Indusert ladning $\pm \sigma_i$ på overflaten og et svekket felt inni isolatoren:

(62)



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$E = E_0 - E_i < E_0$$

Lineær respons:

$$E_i \text{ prop. med } E_0$$

$$\Rightarrow E \text{ --- } E_0$$

$$\Rightarrow E = E_0 / \epsilon_r$$

Isolatorens relative permittivitet: $\epsilon_r = E_0 / E$

	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	(perfekt metall)
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	(∞)

Isolatorens permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

Eks 1: Feltstyrken i avstand $250 \mu\text{m}$ fra et ion med ladning $-2e$ inni en isolator er 9.6 mV/m . Hva er isolatorens relative permittivitet?

$$\text{Løsn 1: } E = E_0 / \epsilon_r = Q / (4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2) (= Q / 4\pi \epsilon r^2)$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = Q / 4\pi \epsilon_0 r^2 E = [9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / \{(250 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 9.6 \cdot 10^{-3}\}]$$

$$= \underline{\underline{4.8}}$$

Eks 2: Hva er farten til synlig lys i vann?

$$\text{Løsn 2: } v = c / n; n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)} = \text{brytningsindeksen.}$$

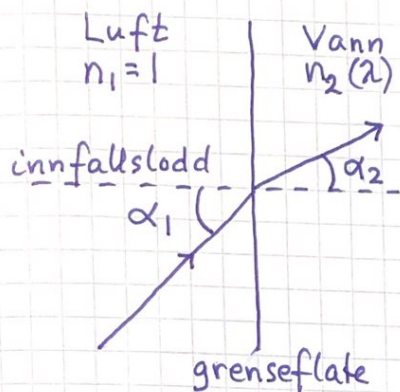
Synlig lys, $\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$: $n \approx 1.3$ for vann.

$$\Rightarrow v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} / 1.3 \approx \underline{\underline{2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

Eks 3: Hvordan oppstår regnbuen?

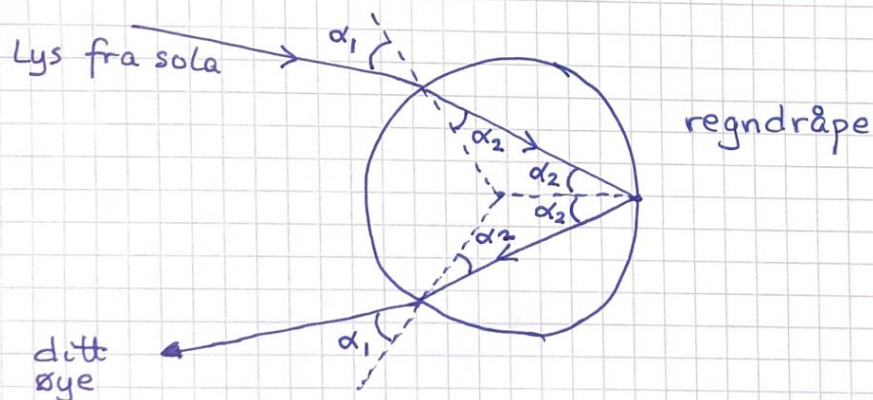
63

Løs 3: Lysstråler endrer retning, de brytes, når de passerer grenseflaten mellom to dielektrika med ulike brytningsindeks. Snells lov: $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$

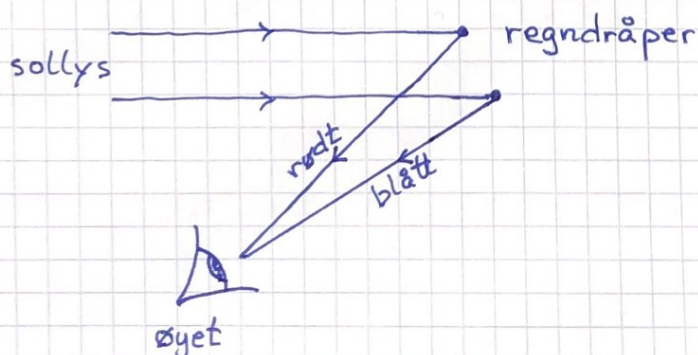


λ (nm)	n_2	farge
400	1.345	fiolett
450	1.341	blå (indigo)
525	1.337	grønn
575	1.335	gul
600	1.334	oransje
700	1.331	rød

$$\alpha_2(\lambda) = \arcsin \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{n_2(\lambda)} \right\}$$

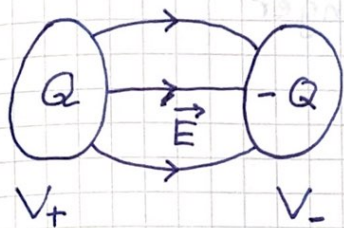


Minste n_2 gir største $\alpha_2 \Rightarrow$ rødt brytes minst



Kondensator. Kapasitans [OS2 8]

To adskilte ledere er en kondensator. (capacitor)

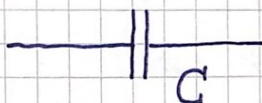


Coulombs lov $\Rightarrow E$ prop. med Q
 $\Rightarrow$ potensialforskjellen, eller
spenningen $V = V_+ - V_-$ også
 prop. med Q

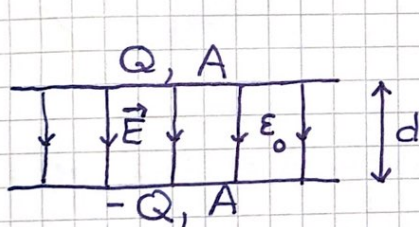
Kondensatorens kapasitans (capacitance):

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{V} \quad ; \quad [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Kretssymbol:



Eks 1 : Platekondensator



$$E = \sigma / \epsilon_0 = \frac{Q}{A \epsilon_0}$$

$$V = E \cdot d = Qd / (A \epsilon_0)$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_0 A / d}$$

Med $d = 1 \text{ mm}$ og $A = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$ blir $C = 0.28 \text{ nF}$

Et dielektrikum mellom platene øker kapasitansen:

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \Rightarrow E = \sigma / \epsilon = Q / (A \epsilon_r \epsilon_0) = V / d$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d}, \text{ dvs øker med en faktor } \epsilon_r$$

Enhet for permittivitet:

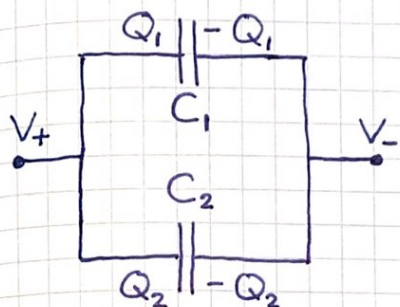
$$[\epsilon] = [C \cdot d / A] = F / m$$

Kobling av kapasitanser

[OS2 8.2]

(65)

Parallellkobling:



Lik spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2$$

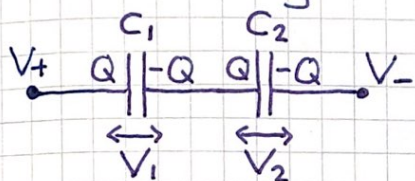
Total ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

Total kapasitans:

$$C = Q / V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



Lik ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

Total spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = V_1 + V_2$$

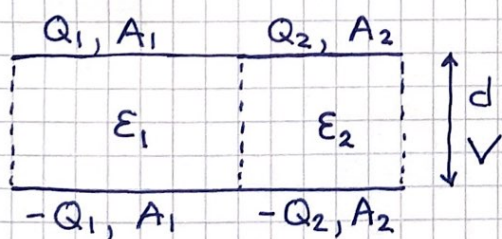
Total kapasitans C gitt ved:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

N kapasitanser i parallell: $C = \sum_{j=1}^N C_j$; i serie: $\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{C_j}$

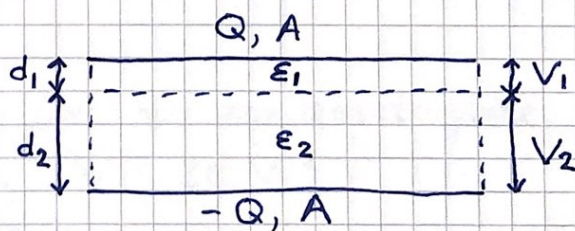
Kondensator fylt med ulike dielektrika:

“Parallellkobling”



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$



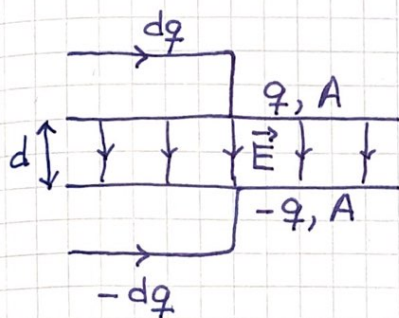
$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

Energi i $\vec{E}$ -felt [OS2 8.3]

(66)

Opplading av kondensator krever et arbeid, som ender opp som pot. energi lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Pot. forskjell mellom platene med ladning $\pm q$: $v(q) = q/C$

Økning av ladningen til $\pm(q+dq)$ øker potensiell energi med

$$dU = v(q) \cdot dq = q \cdot dq / C$$

Dermed må opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gi en total potensiell energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q \, dq / C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2$$

Med $C = \epsilon_0 A / d$ og $V = E \cdot d$:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

$A \cdot d$ = volumet mellom platene, der $E \neq 0$.

Dermed:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenhet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

som gjelder generelt.

Eks: Hva er energien mellom to kondensatorplater når $d = 1 \text{ mm}$, $R = 10 \text{ cm}$ og $V = 30 \text{ V}$?

$$\text{Løsn: } U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot \pi \cdot 0.10^2}{0.001} \cdot 30^2 \text{ J}$$

$$= 1.25 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 125 \text{ nJ} = 782 \text{ GeV}$$