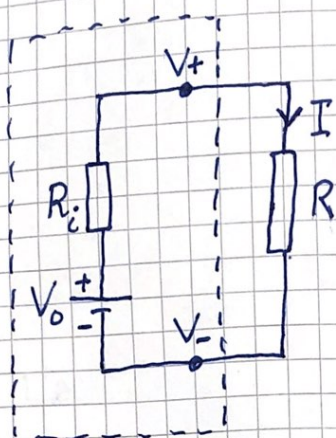


Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde

(73)



$$K2: V_0 - R_i I - R I = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

R_i = indre motstand i reell spenningskilde
(f.eks. et gammelt batteri)

$R_i = 0$ i ideell spenningskilde

Polspenning: $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$
når $R_i > 0$ og $I > 0$

Eks 2: Bestem total motstand og strømmene I_0 , I_1 og I_2 .



Løsning 2:

$$R_{tot} = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = \underline{\underline{\frac{8R}{3}}}$$

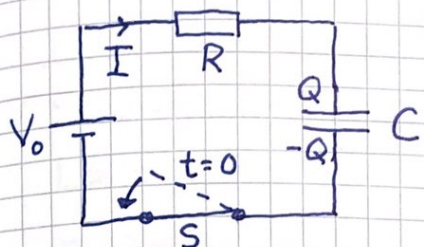
$$I_0 = V_0 / R_{tot} = \underline{\underline{\frac{3V_0}{8R}}}$$

Spennning over parallellkoblingen:

$$V_p = V_0 - 2RI_0 = \frac{1}{4}V_0$$

$$\Rightarrow I_1 = V_p / R = \underline{\underline{\frac{V_0}{4R}}}, \quad I_2 = V_p / 2R = \underline{\underline{\frac{V_0}{8R}}}$$

(slik at $I_1 + I_2 = I_0$)



Bestem $Q(t)$ og $I(t)$ når bryteren S ("switch") lukkes ved $t=0$, og $Q(t=0) = 0$.

(a) $R = 100 \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$

(b) $R = 10 \text{ M}\Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$

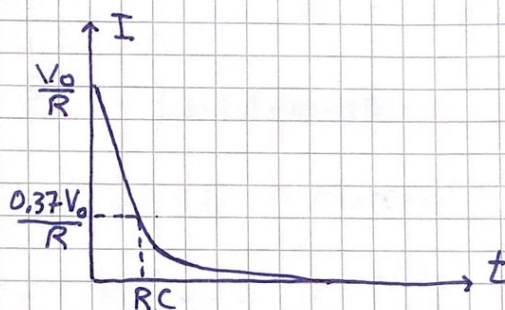
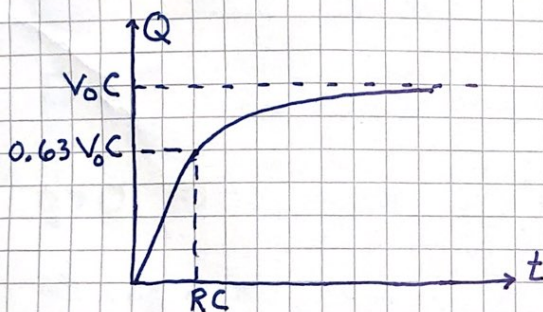
Løsn 3:

$$K2: V_0 - RI - Q/C = 0; \quad I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



$\tau = RC$ er kretsens tidskonstant, et mål for ca hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren

$$Q(\tau) = V_0 C \left(1 - \frac{1}{e} \right) = 0.63 V_0 C; \quad Q(3\tau) = 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e} = 0.37 V_0/R; \quad I(3\tau) = 0.05 V_0/R$$

(a) $\tau = 100 \Omega \cdot 10^{-7} \text{ F} = 10^{-5} \text{ s}$

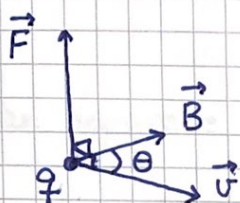
(b) $\tau = 10^7 \Omega \cdot 10^{-5} \text{ F} = 100 \text{ s}$

Magnetostatikk [052 11, 12]

(75)

Magnetisk kraft [052 11.2]

Strømmer og magneter omgir seg med et magnetfelt $\vec{B}$.
Ladning q med fart $\vec{v}$ i magnetfelt $\vec{B}$ påvirkes av magnetisk kraft:



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB \sin \theta, \quad \vec{F} \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

Enhet: $[B] = T$ (tesla); $1T = 10^4 G$ (gauss)

Eks: Krysset $\vec{E}$ og $\vec{B}$, hastighetsfilter



Notasjon:

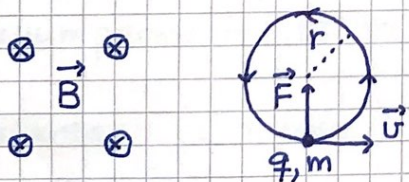
$\otimes$ inn i planet
 $\odot$ ut av planet

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e$ ned, $\vec{F}_m$ opp ($q < 0 \Rightarrow$ omvendt)

$\Rightarrow$ ingen avbøyning for partikler med $v = E/B$.

Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt [052 11.3]



Antar $\vec{v} \perp \vec{B}$ (Kun $v_{\perp}$ påvirkes av $\vec{B}$)
 $\Rightarrow F = qvB$

Tilført effekt: $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ Magn. kraft gjør aldri et arbeid.

Vi får uniform sirkelbevegelse med konstant $K = \frac{1}{2}mv^2$.

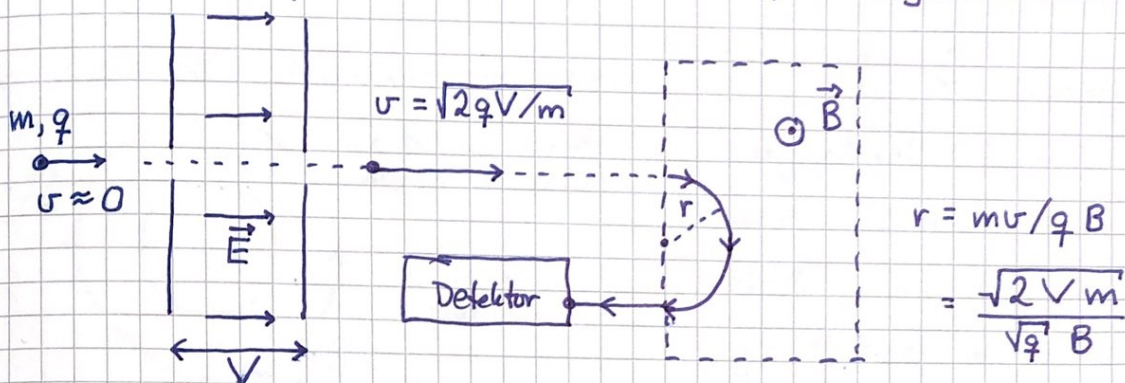
Spiralbane dersom $\vec{v}$ har en komponent $v_{\parallel}$ langs $\vec{B}$.

$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = qB/m = \text{syklotronfrekvensen}$$

Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; Øving 11]

76



Kan separere isotoper og generelt bestemme ionenes masse

Biot-Savarts Lov [OS2 12.1]



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

= magnetfelt i afstand $\vec{r}$ fra lederbit $d\vec{s}$ i strømsløyfe med strøm I

Totalt magnetfelt fra strømsløyfe:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{Biot-Savarts Lov, 1820})$$

(Jf. Coulombs lov : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$)

Vakuumpërmeabiliteten : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} / \text{A}$

Lysfarten (E.M. bølger) i vakuum : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

I stoff med permittivitet $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ og permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$:

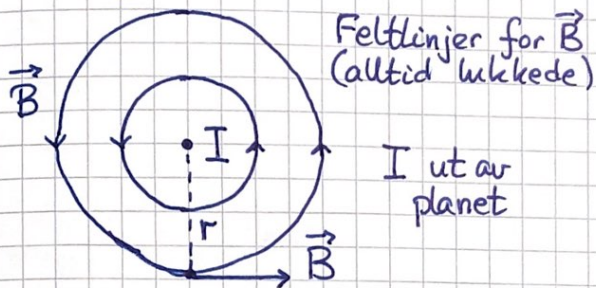
$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = c/\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$. For de fleste materialer er $\mu_r \approx 1$

(unntak: ferromagneter) slik at $v = c/n$ med

$n = \sqrt{\epsilon_r}$ = materialets brytningsindeks.

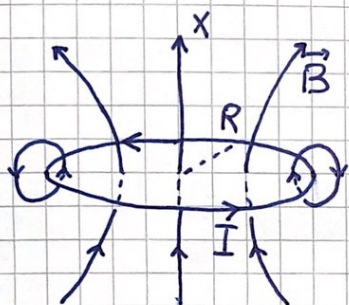
Eksempler [12.2, 12.4, 12.6 ; se notat for utledninger] (77)

1. Lang rett strømførende leder : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}$, retning tangentielt til sirkel med lederen i sentrum.



HHR: Tommel langs I
gir 4 øvrige fingre langs $\vec{B}$

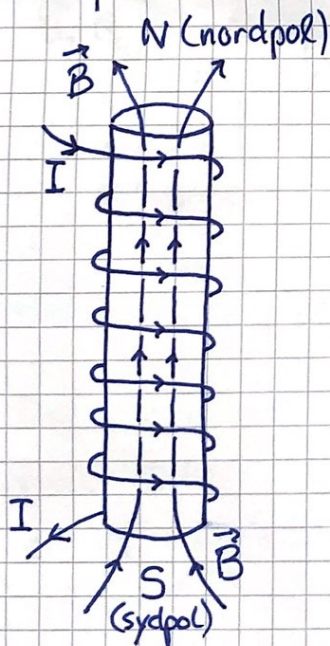
2. Sirkulær strømsløyfe : På sløyfas akse (her x-aksen) er



$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

HHR: 4 fingre langs I gir
tommel langs $\vec{B}$ på sløyfas
akse

3. Spole :



Antar ideell spole : Lang og tettviklet.

Med N viklinger på en lengde l
og spolestrøm I :

Inni spolen : Uniformt felt med

$$\text{feltstyrke } B = \mu_0 n I,$$

$n = N/l = \text{antall viklinger pr lengdeenhet}$

Utenfor spolen : $B \approx 0$

(Ved spolens ender : $B = \frac{1}{2} \mu_0 n I$)

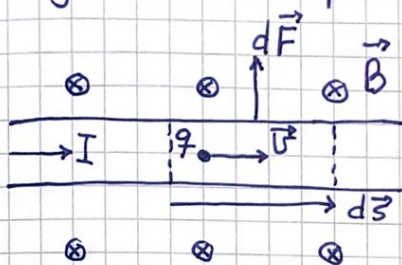
HHR som for enkel strømsløyfe.

Magnetens poler : $\vec{B}$ inni spolen fra sydpol S
mot nordpol N.

Magnetisk kraft på strøm

[OS2 11.4]

(78)



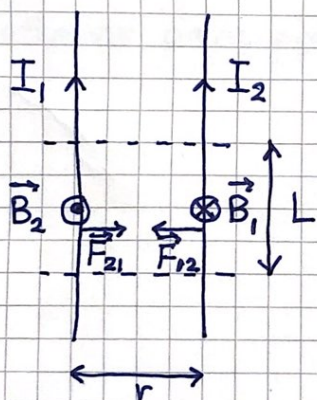
$d\vec{F} = N \cdot q \vec{v} \times \vec{B}$ = kraft på N frie ladninger q med midlere driftsfart $\vec{v}$ langs lederen; N = antall frie ladninger på lengden ds

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{N \cdot q}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft på hele lederen: $\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$

Rett leder med lengde L i uniformt $\vec{B}$ -felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer [OS2 11.4]



$$B_j = \frac{\mu_0 I_j}{2\pi r} \quad (j=1,2)$$

= feltstyrke i avstand r fra leder j

Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

Pr lengdeenhet: $f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

Hvis to strømmer i motsatt retning: Frastøtende kraft.

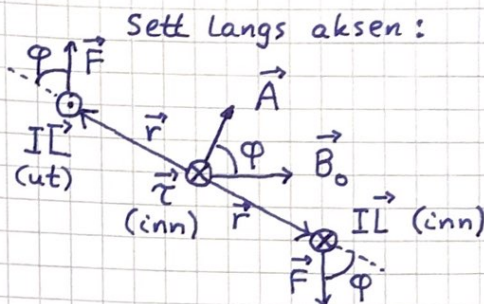
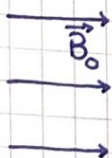
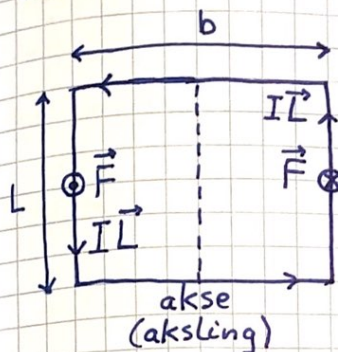
Def. av 1A (inntil 20.05.2019):

Hvis $I_1 = I_2$ og $r = 1\text{ m}$ gir $f = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$,

er $I_1 = I_2 = 1\text{ A}$

Eks 2: Dreiemoment på strømsløyfe i ytre felt $\vec{B}_0$

(79)



$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}_0 ; \vec{B}_0 \perp \vec{L} \Rightarrow F = ILB_0$$

$$\vec{A} = A\hat{n} = bL\hat{n} ; \hat{n} = \text{enhetsvektor} \perp \text{strømsløyfa}$$

$$|\vec{\tau}| = |\sum \vec{r} \times \vec{F}| = |2\vec{r} \times \vec{F}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\phi = IAB_0 \sin\phi$$

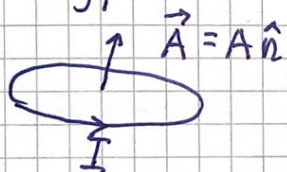
$$= |I\vec{A} \times \vec{B}_0| \Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}_0$$

Spole med N viklinger: $\vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}_0$

Dette er prinsippet for en likestrømsmotor (DC-motor)

Magnetisk dipol og dipolmoment [OS2 11.5]

En strømsløyfe er en magnetisk dipol:



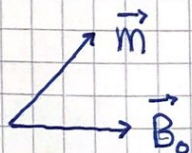
HRR gir retning på $\vec{A}$

Magn. dipolmoment $\stackrel{\text{def}}{=} \text{strøm} \cdot \text{omsluttet areal}$

$$\vec{m} = I\vec{A} ; \text{enhet: } [m] = \text{Am}^2$$

Spole med N viklinger: $\vec{m} = NI\vec{A}$

Dipol i ytre felt $\vec{B}_0$:



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

If. $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$

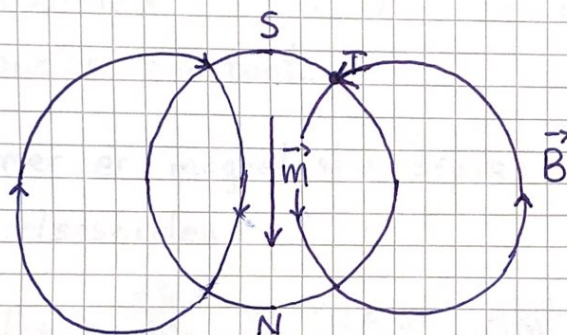
$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(s. 61)

Eks 1: Bestem maksimalt dreiemoment på en spole med 3200 viklinger rundt et areal $2\text{cm} \times 2\text{cm}$ og spolestrøm 6.0 A , i et ytre felt 2.5 T . (80)

Løsn 1: $m = NIA = 3200 \cdot 6.0\text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2 = 7.68\text{ Am}^2$
 $\tau_{\text{max}} = m B_0 = 7.68\text{ Am}^2 \cdot 2.5\text{ T} \approx \underline{\underline{19\text{ Nm}}}$

Eks 2: $\vec{B}$ i Trondheim (63.45°N , 10.42°Ø)
 Jorda er en magnetisk dipol, med $m \approx 8 \cdot 10^{22}\text{ Am}^2$



Med vår definisjon av magnetiske poler ligger magnetisk N nær geografisk S, og omvendt.

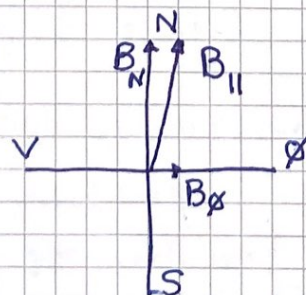
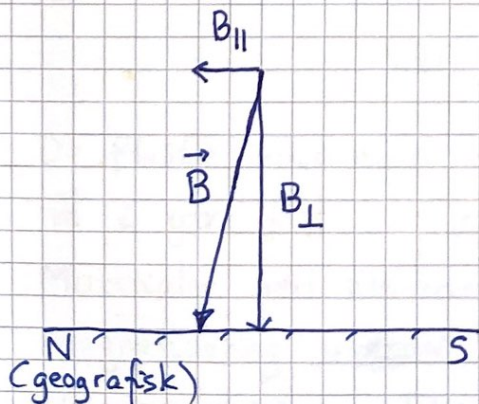
Trondheim 31.10.24 (World Magnetic Model; [ngdc.noaa.gov](https://www.ngdc.noaa.gov))

$B = |\vec{B}| = 52241 \pm 145\text{ nT}$; $dB/dt = 48\text{ nT/år}$

$B_{\perp} = 50449 \pm 157\text{ nT}$

$B_{\parallel} = 13567 \pm 128\text{ nT}$

$B_N = 13515 \pm 131\text{ nT}$, $B_{\phi} = 1184 \pm 94\text{ nT}$

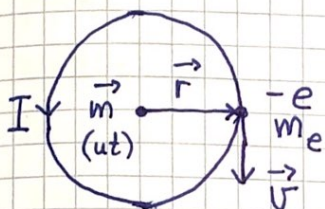


De magn. polene flytter seg flere km pr år.

Magnetisme [OS2 12.7]

(81)

Atomær magnetisk dipol:



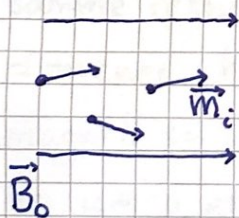
$$\begin{aligned} I &= \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; \quad A = \pi r^2 \\ \Rightarrow m &= IA = \frac{1}{2} e v r \\ L &= |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} I &= \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; \quad A = \pi r^2 \\ \Rightarrow m &= IA = \frac{1}{2} e v r \\ L &= |\vec{r} \times \vec{p}| = r \cdot m_e v \end{aligned}} \right\} \Rightarrow m = \frac{e}{2m_e} \cdot L$$

Kvantemekanikk viser at dreieimpuls L og spinn S for elektroner og andre elementærpartikler er av størrelsesorden $\hbar = h/2\pi$, der $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js er Plancks konstant.

$\Rightarrow$ Atomer er magnetiske dipoler med dipolmoment av størrelsesorden

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

I et ytre felt $\vec{B}_0$ gir dreiemomentet $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ en tendens til innretting av $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$:



Materialets magnetisering er def. som magn. dipolmoment pr volumenhet:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V ; \quad [M] = \text{A/m}$$

[Jf. polarisering $\vec{P}$ s. 61]

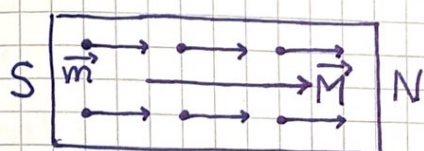
De fleste materialer får ubetydelig innretting av atomære $\vec{m}$ i ytre felt $\vec{B}_0$; de er paramagnetiske. Eks: Al, Na, Mg... Materialer med atomære $\vec{m} = 0$ får induisert en svak magnetisering motsatt rettet det ytre feltet $\vec{B}_0$; de er diamagnetiske. Eks: Cu, Au, Hg, vann, tre, plast,...

Ferromagnetisme

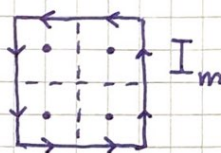
(82)

Noen få grunnstoffer, Fe, Ni, Co, Gd, og endel legeringer, f.eks. $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (neodym-magnet) har atomer som vekselvirker med sine naboatomer slik at alle atomære $\vec{m}$ blir mest stabilt, dvs lavest energi. Da er materialet ferromagnetisk.

Permanentmagneter har parallelle $\vec{m}$ i hele materialet:

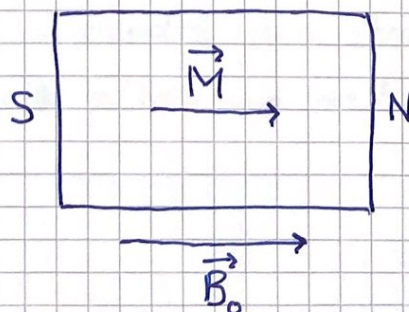
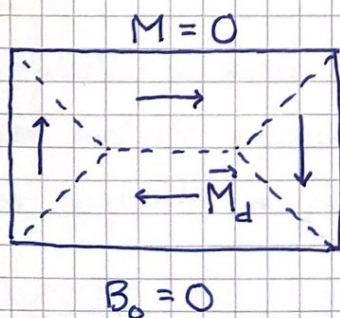


Sett forfra,
med N ut
av planet:



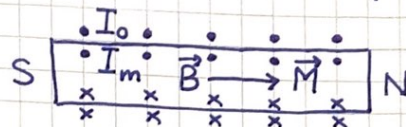
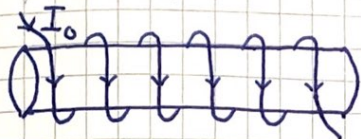
Vi får en bundet magnetiseringsstrøm I_m i overflaten, mens indre strømmer kansellerer! Jf. industert overflateladning på en isolator i ytre felt $\vec{E}_0$ (s.62).

Umagnetiske ferromagneter, f.eks. stål, har mange små domener, dvs områder med lineær utstrekning ca $1 - 100 \mu\text{m}$. I et gitt domene peker alle atomære $\vec{m}$ i samme retning og gir magnetisering $\vec{M}_d$. Men ulike domener har $\vec{M}_d$ i ulike retninger slik at den totale magnetiseringen blir $\vec{M} = \sum \vec{M}_d \approx 0$. Dvs, materialet er umagnetisk, men blir magnetisk i et ytre felt $\vec{B}_0$ pga innretting av de ulike $\vec{M}_d$ langs $\vec{B}_0$:



Eks: Spole med jernkjerne. Lineær respons.

(83)



I_0 og I_m er hhv spolestrøm og magnetiseringsstrøm pr vikling
 $B_0 = \mu_0 n I_0$ og $B_m = \mu_0 n I_m$ er bidragene til magnetfeltet
 inni spolen pga hhv I_0 og I_m , slik at totalt magnetfelt
 inni spolen blir $B = B_0 + B_m = \mu_0 n (I_0 + I_m)$. Vi antar lineær
 respons, dvs at B_m er prop. med B_0 , slik at B blir prop. med
 B_0 . Vi kan da skrive $B = \mu_r B_0$, der μ_r er materialets
 relative permeabilitet. Med $B_0 = \mu_0 n I_0$ har vi dermed

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I_0 = \mu n I_0$$

der $\mu = \mu_r \mu_0$ er materialets permeabilitet. Noen tallverdier:

	vakuum	Al	Cu	Fe 99.8%	Rustfritt stål
μ_r	1	1.000022	0.999994	5000	750 - 1800

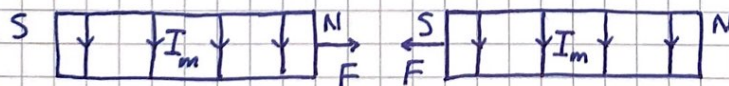
Tallempeksel, spole med jernkjerne:

$N = 1600$, $l = 5.0$ cm, $I_0 = 1.0$ A, $\mu_r = 1600$. Finn B og I_m .

Løsning: $B = \mu_r \mu_0 n I_0 = 1600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (1600/0.050) \cdot 1.0$ T = 64 T

$\mu n I_0 = \mu_0 n I_0 + \mu_0 n I_m \Rightarrow I_m = (\mu_r - 1) I_0 \approx \mu_r I_0 = \underline{\underline{1600 \text{ A pr vikling}}}$

Eks 2: Nettokraft mellom to magneter



Parallell strømmer nærmere hverandre enn strømmer
 med motsatt retning gir netto tiltrekning mellom
 to motsatte magn. poler.