

MEKANIKK

①

Størrelser og enheter [OS1 1]

Eks: Verdensrekord, maraton 2:00:35

$t = 7235 \text{ s}$ ← SI-enhet (s = sekund)
symbol ↑ tallverdi

Notasjon: $[t] = \text{s}$ "SI-enhet for tid er sekund"

Grunnenheter i SI-systemet:

meter	m	lengde	} mekanikk
kilogram	kg	masse	
sekund	s	tid	
ampere	A	strømstyrke	elmag
kelvin	K	temperatur	} termodynamikk
mol	mol	stoffmengde	
candela	cd	lysstyrke	

Definert med utgangspunkt i eksakt definerte verdier for diverse naturkonstanter (siden 20.05.2019):

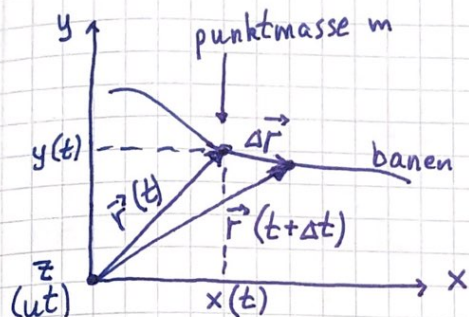
lysfarten i vakuum	$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$
elementærladningen	$e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Plancks konstant	$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmanns konstant	$k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Sammensatte enheter:

hastighet (fart)	$[v] = \text{m/s}$
akselerasjon	$[a] = \text{m/s}^2$

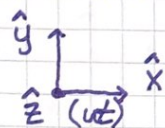
Avledete enheter:

kraft	$[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (newton)}$
arbeid, energi	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J (joule)}$

Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer:



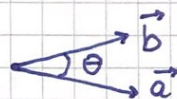
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z} \quad \text{osv med høyrehåndregel}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \cos \theta ; |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$



$$\text{Forflytning i løpet av } \Delta t: \Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ Forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \quad (\text{tangent til banen})$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ Hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad \text{med } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \text{med } a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

Omvendt er $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ integraler av hhv $\vec{v}(t)$ og $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

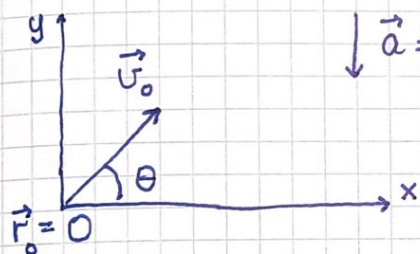
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt \quad (3)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant, og med $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet



$$\downarrow \vec{a} = -g \hat{y} \quad ; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Bestem $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt \hat{y} \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \hat{y}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = v_0 t \cos \theta \quad ; \quad y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} gt^2}$$

$$t = x/(v_0 \cos \theta) \Rightarrow y(x) = x \tan \theta - x^2 g / (2 v_0^2 \cos^2 \theta) \quad ; \quad \text{parabel}$$

TFY4104 05.12.24 nr 3:

$v_0 = 25 \text{ m/s}$, $\theta = 60^\circ$. Hva er t når $y = y_{\max}$?

Løsn: $v_y = 0$ når $y = y_{\max}$

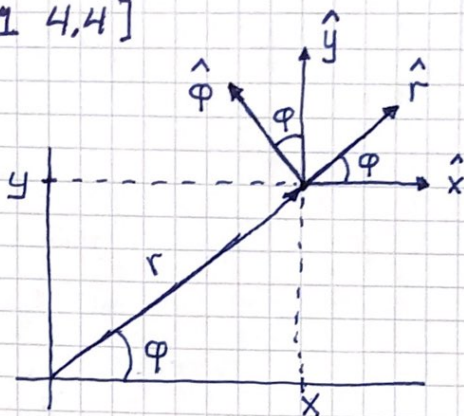
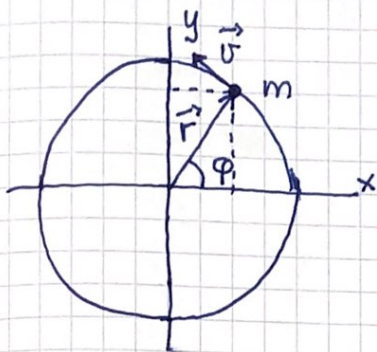
$$\Rightarrow v_0 \sin \theta - gt = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ}{9.81 \text{ m/s}^2} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}/2}{9.81} \text{ s} = \underline{\underline{2.2 \text{ s}}}$$

Sirkelberegelse

[059 4,4]

(4)



Polarkoordinater :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; $\varphi > 0$ mot klokka

Fra figuren ser vi :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi = d\hat{r}/d\varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde} / \text{radius}$

$$d\varphi = ds/r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt rad})$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidseenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = 1/s \quad (\text{evt rad/s})$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{endring i vinkelfart pr tidseenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2 \quad (\text{evt rad/s}^2)$$

Fra fig. ser vi : $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$; $\vec{v} \perp \vec{r}$

Med små dt og $d\varphi$: $|d\vec{r}| = dr = ds = r d\varphi$

$$\Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad ; \quad \vec{v} = r\omega \hat{\varphi}$$

[Senere, med $\vec{\omega}$ langs rotasjonsaksen : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$]

Akselerasjon ved sirkelbevegelse :

⑤

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad [\text{kjerneregul}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = d\vec{v}/dt &= \left. \begin{aligned} -\hat{x} r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \hat{y} r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -\hat{x} r \ddot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \ddot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [\text{kjerneregul}] \\ \text{og produktregel} \end{array} \\ &= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Sentripetalaks. : $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$; dvs retning
inn mot sirkelens sentrum

Baneaks. : $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$; dvs retning
tangentielt med sirkelbanen

Uniform sirkelbevegelse dersom ω og v er konstante ;
da er $a_{\parallel} = 0$ og $a = a_{\perp} = v^2/r$.

Et par sentrale størrelser til :

periode $\stackrel{\text{def}}{=} \text{tid pr omløp}$

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad ; \quad [T] = s$$

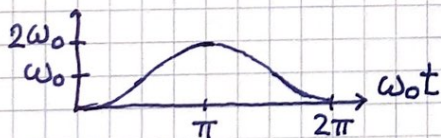
frekvens $\stackrel{\text{def}}{=} \text{antall hele omløp pr tidsenhet}$

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$

TFY4104 05.12.24 nr 4 og 5:

Karusell, $\omega(t) = \omega_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]$; $\omega_0 = 0.10 \text{ rad/s}$

4) Hva er maksimal vinkel fart ?



$$\omega_{\max} = 2\omega_0 = \underline{\underline{0.20 \text{ rad/s}}}$$

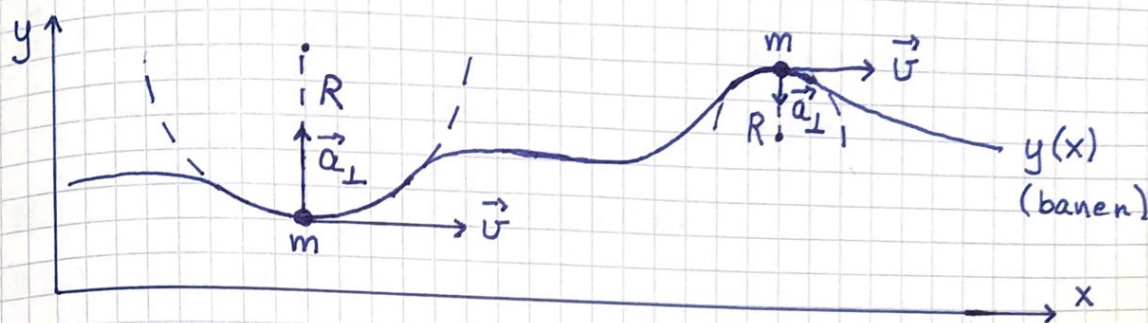
for $\omega_0 t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

5) Hva er maksimal vinkelakselerasjon ?

$$\dot{\omega} = \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{\omega}_{\max} = \omega_0^2 = \underline{\underline{0.010 \text{ rad/s}^2}}$$

Beregelse langs krum bane (LAB) :

⑥



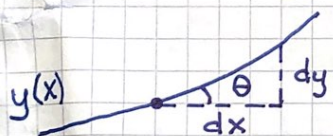
Banens krumningsradius (utledet i notater s.10-11 i 2019)

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad (y' = \frac{dy}{dx} ; y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$$

varierer langs banen og er radien i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$.

- $a_{\perp} = v^2/R$ med retning inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow R = |y''|^{-1}$
- $y'' = 0$ i vendepunkter $\Rightarrow R \rightarrow \infty$ og $a_{\perp} = 0$

Banens helningsvinkel:



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

TFY4104 05.12.24 nr 7:

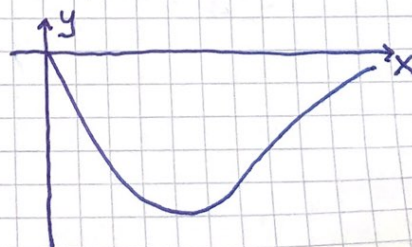
$$y(x) = -ax \exp(-x/b) ; a = 1.50, b = 40.0 \text{ cm}$$

Hva er helningsvinkelen i $x=0$?

$$\text{Løsn: } dy/dx = -a \exp(-x/b) + (ax/b) \exp(-x/b)$$

$$\Rightarrow y'(0) = -a = -1.50$$

$$\Rightarrow \theta(0) = \arctan(1.50) = \underline{\underline{56^\circ}}$$



Newtons Lover

[051 5, 6]

(7)

$m, \vec{v}, \vec{a}$: legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1 : $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : Krefter er vekselvirkninger mellom legemer.

Hvis legeme 1 virker med kraft $\vec{F}_{12}$ på legeme 2, virker legeme 2 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ på legeme 1.

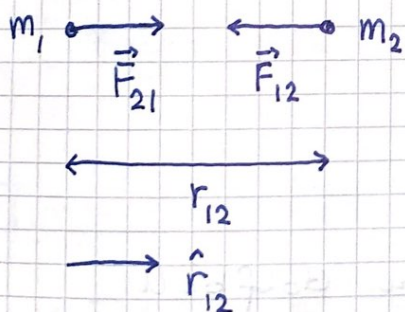
$$[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (newton)}$$

Impuls (= bevegelsesmengde) : $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$$

Fundamentale naturkrefter [051 13.1 ; 052 5.3]

- Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser



Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

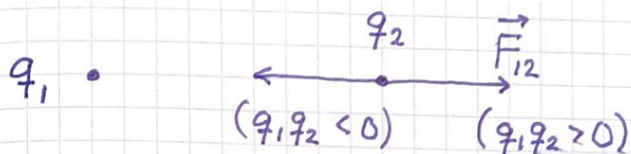
Den universelle gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

- Coulombkraft (elektrostatisk kraft):

(8)

Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} ; [q] = C \text{ (coulomb)}$$

Vakuumpermittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

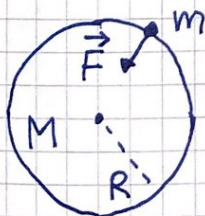
- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet, og stabilitet av atomkjerner.

Viktigst i mekanikken:

- Tyngdekraften fra jorda, og mellom himmellegemer
- Kontaktkrefter: Normalkraft og friksjonskraft. Begge disse er coulombkrefter.

Tyngde

[OS1 13.2; 5.4]



$$F = GmM/R^2 = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

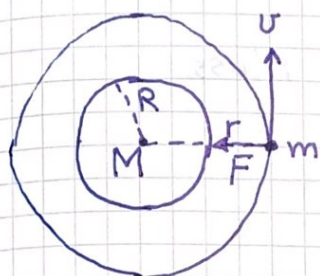
$$\Rightarrow F = mg \text{ med } g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da: $a=g$

Satellittbaner: Sirkel med jordas sentrum i sentrum, radius r .

⑨



$$F = GMm/r^2, \quad a = v^2/r, \quad F = ma$$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

Geostasjonære satellitter går i en bane i ekvatorialplanet med omløpstid $T \approx 24$ timer ($T = 23\text{ h } 56\text{ min } 4.1\text{ sek}$)

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} \quad (= 0.2618 \frac{\text{rad}}{\text{h}}) \text{ er da fastlagt}$$

$$v^2 r = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r = GM \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 4.22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

og $v = \sqrt{GM/r} \approx 3 \text{ km/s}$. Siden $R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, er satellitten i høyde $h = r - R \approx 36\,000 \text{ km}$ over et fast sted på ekvator.
 (35786 km)

Eks: Hva er minste mulige tidsforsinkelse ved kommunikasjon via en geostasjonær satellitt?

Løsn: Signalets fart er $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (EM bølger), og strekningen er minst $2 \cdot h \approx 7.2 \cdot 10^7 \text{ m}$.

$$\Rightarrow \Delta t_{\min} = \frac{2h}{c} \approx \underline{\underline{0.24 \text{ s}}}$$

Kontaktkrefter

[051 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

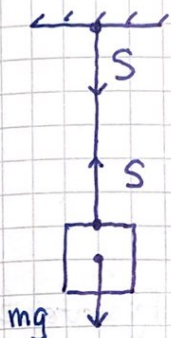
(10)

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer



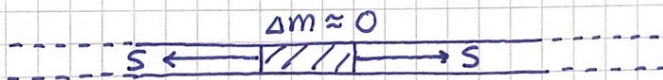
Med klossen i ro gir N1 at $N = mg$

Snorkraft: S = kraften fra snora på det den er festet til

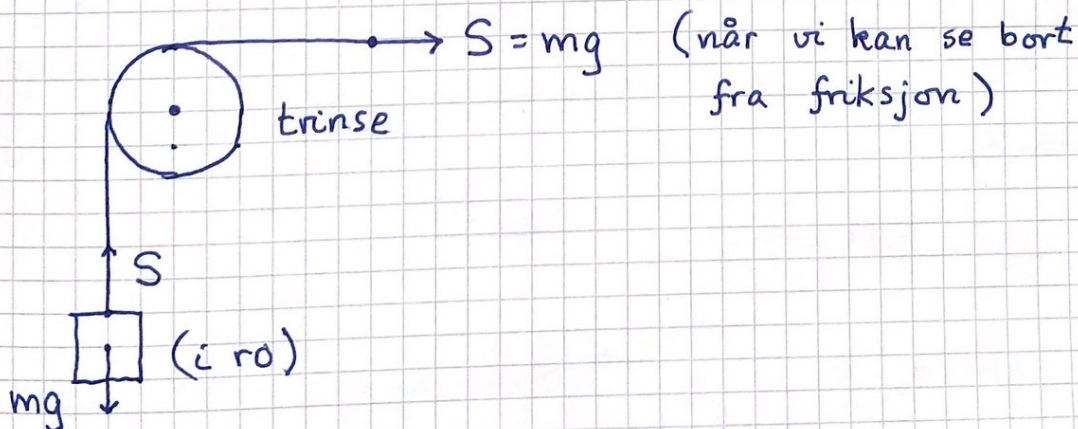


Med klossen i ro: $S = mg$ (N1)

I lette og utstrekte snorer er snordraget S like stort i hele snora:



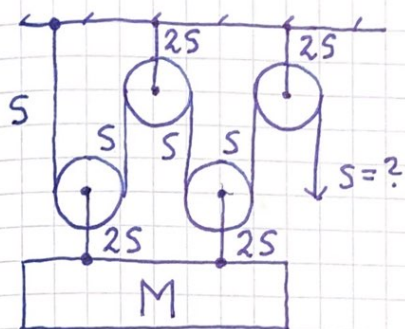
Trinser endrer retningen på $\vec{S}$:



(når vi kan se bort fra friksjon)

Talje:

(11)



N1 for kassa: $4S = Mg$

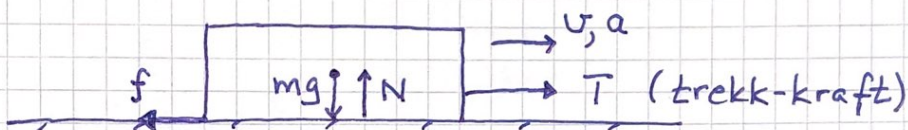
$\Rightarrow$ Kan løfte kassa med
kraften $S = \frac{1}{4} Mg$

Friskjon

[OS1 6.2]

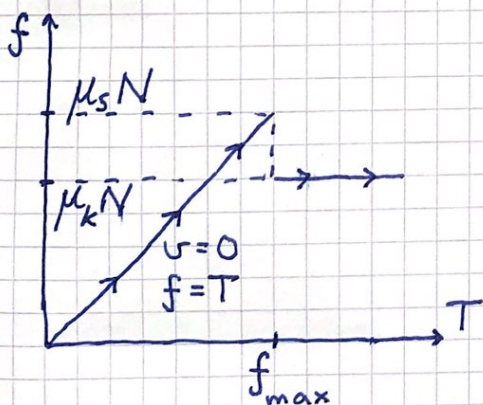
f = kontaktkraftens komponent tangentielt med
kontaktflaten mellom to legemer; retningen
er mot legemenes relative bevegelse

Empirisk:



$N \perp \text{bordet} \Rightarrow N = mg$

$N \parallel \text{---} \Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$



Statisk friskjon: $f \leq f_{\max} = \mu_s N$

μ_s = statisk friskjonskoeffisient

Kinetisk friskjon: $f = \mu_k N$

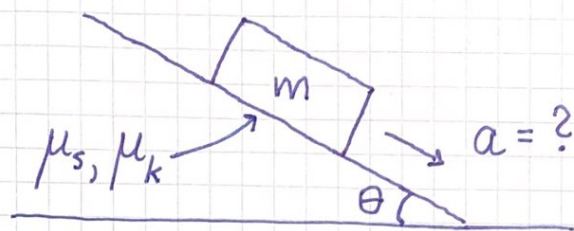
μ_k = kinetisk friskjonskoeffisient

$[\mu] = 1$ (dim.løs)

Verdien av μ_s og μ_k avhenger av overflaten til
begge legemene som er i kontakt. Som regel er $\mu_s > \mu_k$;
ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$.

Eks, inkl. typisk "strategi": Kloss på skråplan

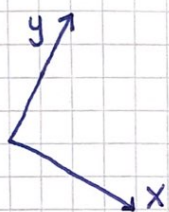
(12)



- Finn alle ytre krefter og tegn fritt-legeme-diagram



- Velg koordinatsystem og dekomponer kreftene



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene

$$N1 \perp \text{skråplanet} \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{---} \Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$$

Statisk ($a=0$): $f = mg \sin \theta$; må ha $f \leq f_{\max}$
med $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$; bare mulig hvis $\tan \theta \leq \mu_s$

$$\text{Kinetisk: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

Måling av μ_s : Vi øker θ inntil klossen begynner
å gli ved vinkelen $\theta_{\max}$; da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



anta omgivende fluid (gass eller væske)
med massetetthet ρ og dynamisk
viskositet μ

Luft: $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$

Vann: $\rho = 1000$ " " , $\mu = 10^{-3}$ " "

Liten $v \Rightarrow$ Pen og lagdelt (laminær) strømning av
fluidet rundt legemet og $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor $v \Rightarrow$ Uordnet (turbulent) strømning av fluidet
og $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2 \hat{v}$, der

C_d = drag-koeffisienten, i hovedsak bestemt av legemets form

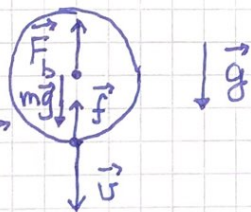
A = legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$

Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Oppdrift:

(buoyancy)

volum
 V



$\vec{F}_b = -\rho V \vec{g}$ = tyngden
av den fortrengte
fluidmengden (Arkimedes'
prinsipp)

Terminalfart: Maksimal fart ved "fritt" fall i
tyngdefeltet; tilsvarende $\sum \vec{F} = 0$, dvs

$$\vec{F}_b + \vec{f} = m\vec{g}$$

Ved fall i luft er ofte $F_b \ll f$, slik at $f(v_t) = mg$
gir terminalfarten v_t . Eks: Kule, stor fart, radius r .

$$N1 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho A C_d v_t^2 = mg \Rightarrow v_t \approx \{4mg / (\rho \pi r^2)\}^{1/2}$$

Arbeid og energi [OS1 7, 8]

(14)

Arbeid [OS1 7.1]

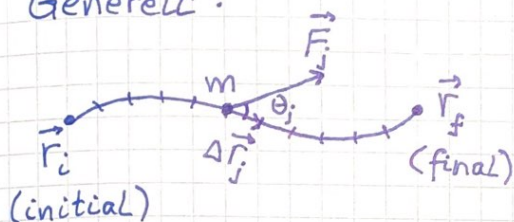
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\cdot$ forflytning



$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \Delta r_j \cos \theta_j$$

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m når den flytter seg fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ utført arbeid (overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad ; \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \quad (\text{watt})$$

TFY412S 21.05.24 nr 1:

Hvis 1 kWh koster 593 øre, hvor mange MJ får du for 100 kr?

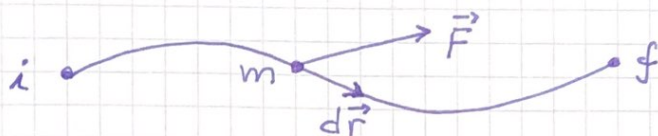
$$\text{Løsn: } 1 \text{ kWh} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$$

$$\Rightarrow \text{prisen er } 5.93 \text{ kr} / 3.6 \text{ MJ} = 1.647 \text{ kr/MJ}$$

$$\Rightarrow \text{for 100 kr får du } 100 \text{ kr} / (1.647 \text{ kr/MJ}) = \underline{\underline{60.7 \text{ MJ}}}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2]

(15)



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{m}{2} dv^2$$

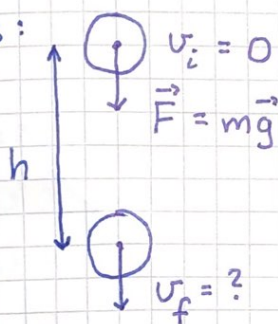
$$\Rightarrow W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \int_i^f dv^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{Dvs: } \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Work-energy theorem

Eks:



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [OS1 8.1-8.4]

Dersom $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, er $\vec{F}$ konservativ.

↑ integral rundt lukket kurve

Da er arbeidet utført av $\vec{F}$ uavhengig av veien:



$$W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 - \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2$$

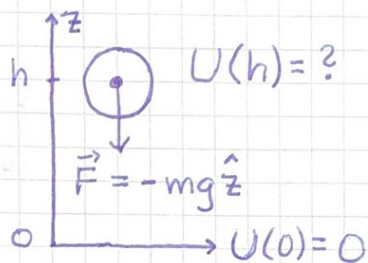
Forskjell i potensiell energi U , med konservativ $\vec{F}$: (16)

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vi velger $U = 0$ der vi ønsker. Bare forskjeller i potensiell energi har fysisk betydning. Anta $U(\vec{r}_0) = 0$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks:



$$\begin{aligned} U(h) &= - \int_0^h F dz \\ &= - \int_0^h (-mg) dz = \underline{\underline{mgh}} \end{aligned}$$

Beregning av $\vec{F}$ fra U :

$$1D: dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -dU/dx$$

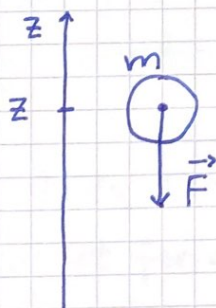
$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til en skalar funksjon $f(x, y, z)$:

$\nabla f = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} f$ = vektor i den retningen som f øker raskest; $|\nabla f|$ = endring i f pr lengdeenhet

$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$ peker i den retningen som U avtar raskest

Eks:



$$U(z) = U(0) + mgz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = -mg\hat{z}}}$$

Energibevarelse

[OS1 8.3]

(17)



$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

Eks: m  $z_i = h$
 $v_i = 0$

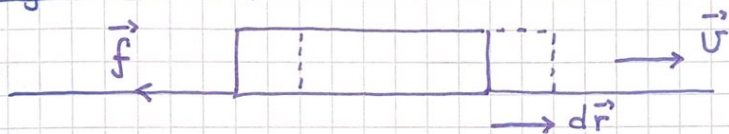
$$K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i$$

 $z_f = 0$
 $v_f = ?$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{v_f = \sqrt{2gh}}$$

Friksjonsarbeid

[OS1 7.1]



Kinetisk friksjon: $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ da $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning. Dermed er $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, og $\vec{f}$ er ikke konservativ. Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi osv.

Statisk friksjon: $d\vec{r} = 0 \Rightarrow dW_f = 0 \Rightarrow$ mekanisk energi er bevart

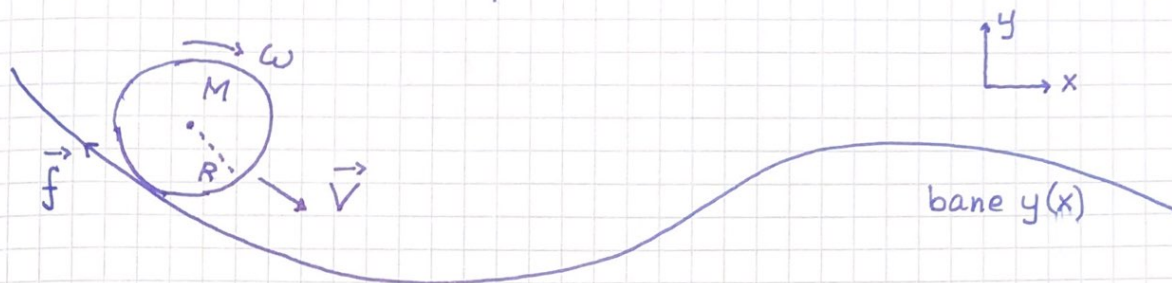
Eks: Hvis klossen får startfart 1.0 m/s og glir 40 cm på bordet før den stopper, hva er da μ_k ?

Løsn: $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$; $W_f = f \cdot s = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$

$$\Rightarrow \mu_k = v_0^2 / (2gs) = 1.0^2 / (2 \cdot 9.81 \cdot 0.40) = \underline{0.13}$$

LAB: Rullende kule på krum bane

(18)



Ren rulling (kula glir ikke) $\Rightarrow$ statisk friksjon $\vec{f}$

$\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U = Mgy$

Translasjonsenergi: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} MV^2$

Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

Trehetsmoment for kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Rullebetingelse: $\omega = V/R$

$$\Rightarrow K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} MR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{5} MV^2$$

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{7}{10} MV^2$$

Anta $V=0$ i start høyden y_0 . Energibevarelse gir:

$$\frac{7}{10} MV(y)^2 = U(y_0) - U(y) = Mg \cdot (y - y_0)$$

$$\Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot (y - y_0)}$$

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

(19)

Massesenter [OS1 9.6]

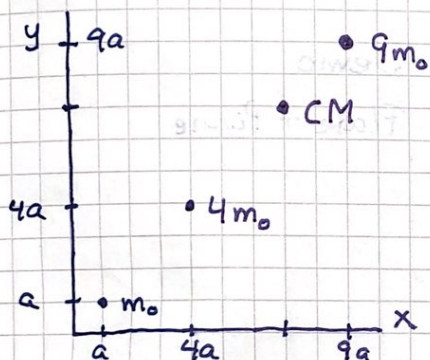
For N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i ; M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{total masse}$$

TFY4125 17/8-24 nr 13:

$$m_j = j^2 m_0 ; x_j = y_j = j^2 a ; a = 10 \text{ cm} ; m_0 = 10 \text{ g} ; j = 1, 2, 3. R_{CM} = ?$$

Løsn:



$$M = 14 m_0$$

$$X_{CM} = Y_{CM} = \frac{1}{M} \{1 + 16 + 81\} m_0 a \\ = 98 m_0 a / (14 m_0) = 7a$$

$$\Rightarrow R_{CM} = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{98} a \\ = \underline{\underline{99 \text{ cm}}}$$

For kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r} dm ; \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; M = \int dm$$

$$\text{Masseelement: } dm = \begin{cases} \lambda \cdot dl & (1D) \\ \sigma \cdot dA & (2D) \\ \rho \cdot dV & (3D) \end{cases}$$

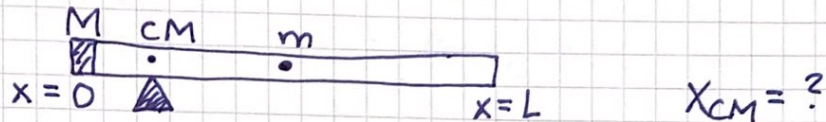
λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet
 dl, dA, dV = hhv lengde-, flate-, volumelement

Med uniform massefordeling:

(20)

$$dm = (M/L)dl \quad (1D); \quad dm = (M/A)dA \quad (2D); \quad dm = (M/V)dV \quad (3D)$$

Eks 1: Plastrør, $m = 165g$, med lodt i enden, $M = 305g$



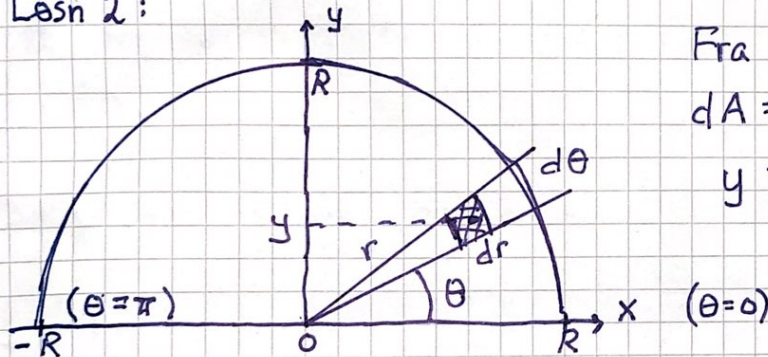
Løsn 1:
$$X_{cm} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 2: Halv sirkelformet skive



Masse M , radius R . $Y_{cm} = ?$

Løsn 2:



Fra figuren:

$$dA = r d\theta \cdot dr \quad (A = \frac{1}{2}\pi R^2)$$

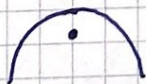
$$y = r \sin \theta$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta r d\theta dr$$

Her er: $\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3}R^3$; $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow Y_{cm} = \frac{4}{3\pi} R \approx \underline{\underline{0.42 R}}$$

Halv tynn ring:



$$Y_{cm} = \frac{2}{\pi} R$$

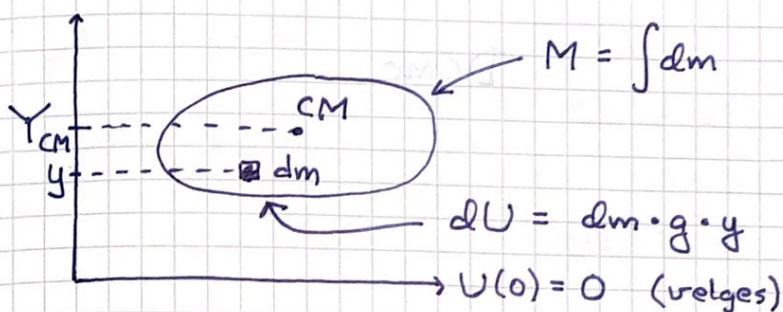
Halv kompakt kule:



$$Y_{cm} = \frac{3}{8} R$$

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet

(21)



Total pot.energi: $U = \int dU = \int g y dm = g M Y_{CM}$

Som om hele massen M er i massesenterhøyden Y_{CM}

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6]

Anta system med N punktmasser $\{m_i\}$ i pos. $\{\vec{r}_i\}$

$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

↑ "indre" kraft fra m_j på m_i

Legg sammen N2 for alle m_i i systemet:

$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{CM} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$HS: \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

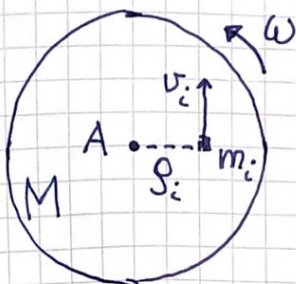
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \dots = 0 \text{ pga } N3$$

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

CM beveger seg som om hele massen M befinner seg i CM og påvirkes av den netto ytre kraften som virker på systemet.

Merk: Kreftenes angrepspunkt er uten betydning for CM-bevegelsen. (Men påvirker rotasjonsbevegelsen.)

Rotasjonsenergi, Trehetsmoment [OS1 10.4, 10.5] (22)



$$M = \sum_i m_i = \text{legemets masse}$$

A = rotasjonsaksen ($\perp$ papirplanet)

r_i = avstanden fra A til m_i

ω = legemets vinkel fart

Rotasjonsenergi:

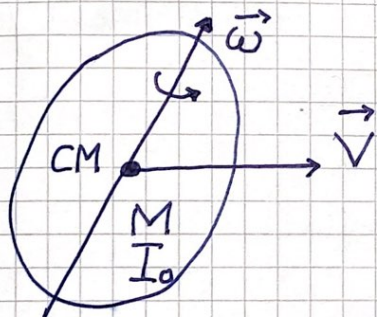
$$K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Trehetsmoment mhp aksen A: $I = \sum_i m_i r_i^2$

Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int r^2 dm$

Generell bevegelse for et stivt legeme:

Translasjon av CM med fart $\vec{V}$ + Rotasjon omkring akse gjennom CM med vinkel fart $\vec{\omega}$.



M = massen

I_0 = trehetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

[Se notat for bevis]

I_0 for legemer som kan rulle:

(23)

Ring og hul sylinder / rør:

M  $I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$

Andre objekter med rotasjonssymmetri om aksen:

- Betrakt objektet som bygd opp av mange ringer (evt. rør)
- Uttrykk g og dm i passende koordinat(er)
- Integrer slik at hele objektet blir med

$\Rightarrow$ Kompakt skive/sylinder: $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$

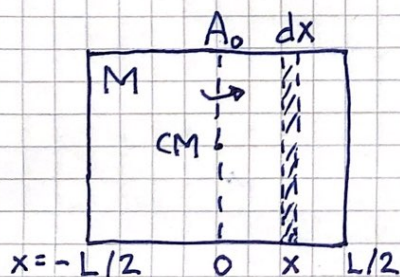
Tynt kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Dvs: $I_0 = c \cdot MR^2$ med $c = 1, 2/3, 1/2, 2/5$ for hhv
ring, kuleskall, skive, kule

Steiners sats [OS1 10.5]

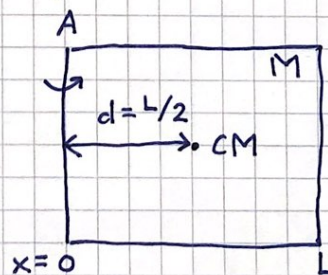
Vi illustrerer med svingdør vs sidehengsløst dør!



$g = x, dm = M dx / L$

$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$

Parallellforskyv
aksen med d :



$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \frac{1}{3} ML^2$

som kan skrives slik:

$I = I_0 + Md^2$ med $d = L/2$

Gjelder generelt:

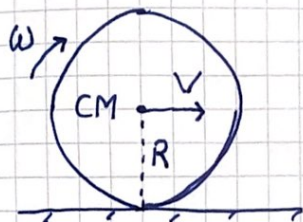
$I = I_0 + Md^2$

[Se notat for bevis]

Ren rulling

[051 11.1]

(24)



For hel omdreining: $V = \frac{2\pi R}{T}$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\Rightarrow \underline{V = \omega R}$$

Rullebetingelsen

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1+c)MV^2}}$$

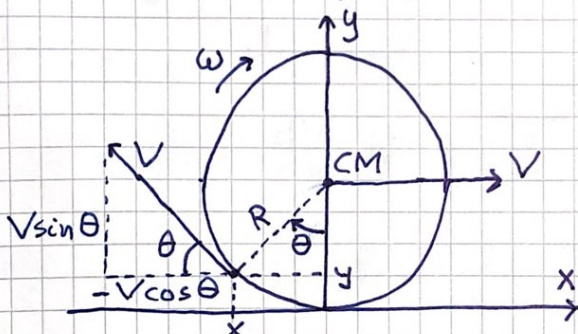
Farten ute på periferien:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{V}{R} \Rightarrow V = R\dot{\theta}$$

Fra figuren:

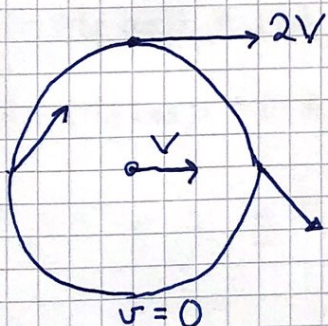
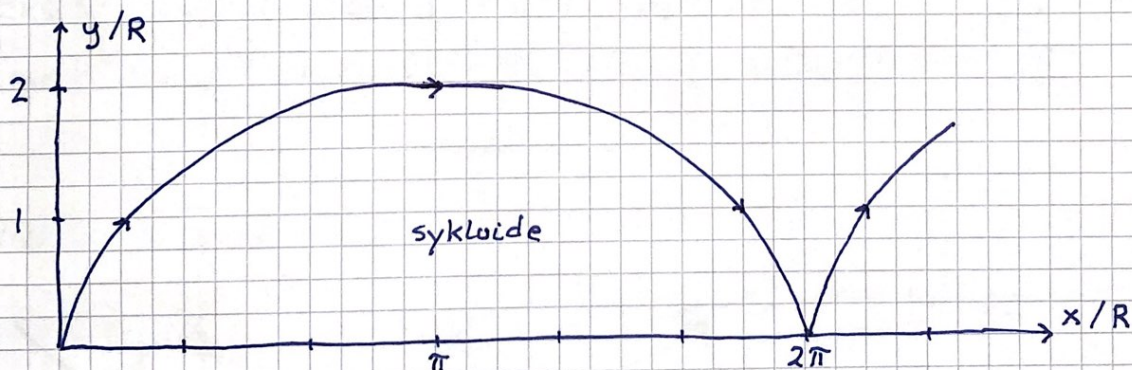
$$v_x = V - V\cos\theta$$

$$v_y = V\sin\theta$$



Barer til punkt på periferien; velger $x=y=0$ for $\theta=0$:

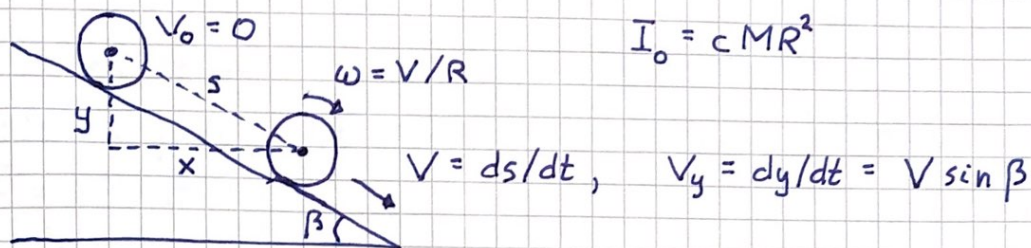
$$x(\theta) = R\theta - R\sin\theta \quad ; \quad y(\theta) = R - R\cos\theta$$



Kontaktpunktet er i ro,
hjulet glir ikke.

Eks: Ren rulling på skråplan

(25)



Bestem V , A , f og $\max \beta$ som gir ren rulling

Løsning: Statisk $f \Rightarrow$ Mek. energi bevart

$$\Rightarrow Mgy = \frac{1+c}{2} MV^2 \Rightarrow \underline{V(y) = \sqrt{\frac{2gy}{1+c}}}$$

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sqrt{\frac{2gy}{1+c}} \sin \beta = \underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}$$

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA \Rightarrow \underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}$$

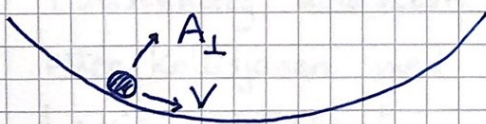
$$f \leq \mu_s N ; \quad \underline{N = Mg \cos \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta \Rightarrow \underline{\tan \beta \leq \mu_s \cdot \frac{1+c}{c}}$$

Eks: Kompakt kule ($c = 2/5$); $\mu_s = 1/3$. Hva er $\beta_{\max}$?

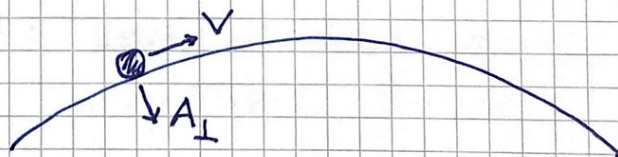
$$\text{Løsn: } \beta_{\max} = \arctan \left\{ (1+2/5)/(3 \cdot 2/5) \right\} = \arctan(7/6) = \underline{49^\circ}$$

Rulling på krum bane:



$$N - Mg \cos \beta = MA_{\perp}$$

$$\Rightarrow N = Mg \cos \beta + MA_{\perp}$$



$$Mg \cos \beta - N = MA_{\perp}$$

$$\Rightarrow N = Mg \cos \beta - MA_{\perp}$$

$$A_{\perp} = V^2/\rho ; \quad \rho = \text{krumningsradien (se s. 6)}$$

Impuls, Kollisjoner, Rakettprinsipp [os1 9]

(26)

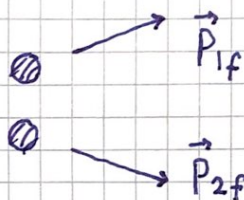
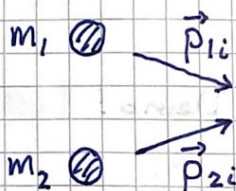
N2 for masse m : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

Massens impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

$\Rightarrow \vec{F} = d\vec{p}/dt$

Impulsbevarelse: Hvis $\vec{F} = 0$ er $\vec{p}$ bevart

Kollisjoner:



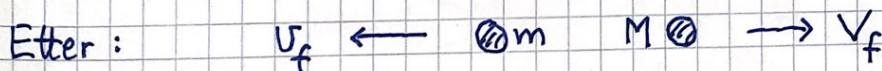
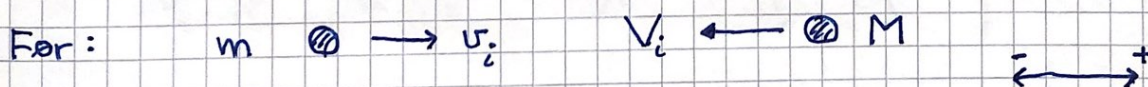
N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \xrightarrow{\text{N2}} d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ er konstant dersom ytre krefter kan neglisjeres i kollisjonen (typisk kortvarig)

Kinetisk energi ($K = \sum_i K_i$) kan gå tapt pga friksjon og deformasjon.

- Elastisk støt : $\Delta K = 0$
- Uelastisk støt : $\Delta K < 0$
- Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen etter kollisjonen med felles slutthastighet. Da er $|\Delta K|$ maksimal.

Vi ser kun på et sentralt støt, dvs kollisjon i 1D:



$$\Delta p = 0 : \quad m u_i + M V_i = m u_f + M V_f \quad (1) \quad (27)$$

Hvis fullstendig uelastisk : $u_f = V_f = \frac{m u_i + M V_i}{m + M}$

Elastisk : $\frac{1}{2} m u_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2 \quad (2)$

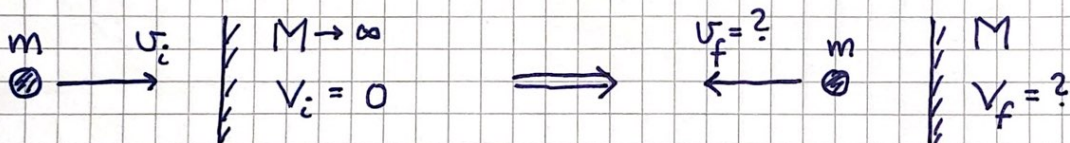
Løsning av (1) og (2) mhp slutt hastighetene gir:

$$u_f = \frac{M}{m+M} \left(2V_i + u_i \cdot \frac{m-M}{M} \right) ; \quad V_f = \frac{m}{M+m} \left(2u_i + V_i \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks 1: $M = m, V_i = 0$ (Newtons rulle)

Da er $u_f = 0$ og $V_f = u_i$

Eks 2: Ball mot vegg



Løsning 2:

$$u_f = \frac{M}{m+M} \cdot u_i \cdot \frac{m-M}{M} = \underline{\underline{-u_i}} ; \quad V_f = \frac{2m}{M+m} \cdot u_i = \underline{\underline{0}}$$

Impulsbevarelse:

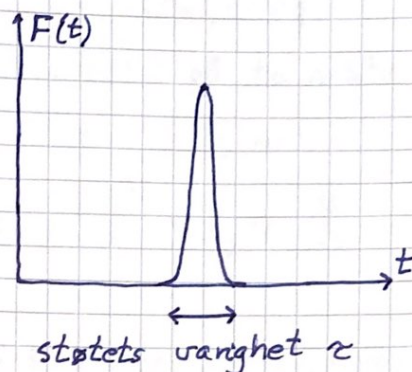
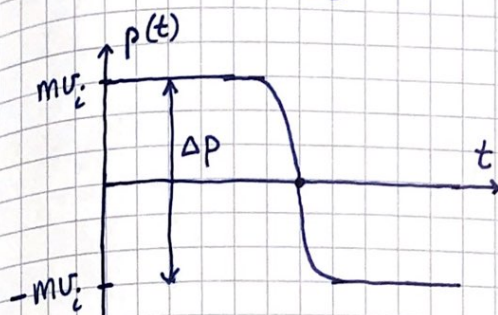
$$\underline{m u_i} = m u_f + M V_f = -m u_i + \frac{2m u_i}{M+m} \cdot M = -m u_i + 2m u_i = \underline{m u_i}$$

Kraftstøt (eng: impulse):

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Ball-mot-vegg-forsøket:

(28)



Midlere akselerasjon i støtet:

Anta $u_i = 10 \text{ m/s}$, $u_f = -10 \text{ m/s}$ og $\tau \approx 2 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle a \rangle = \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 10^4 \text{ m/s}^2 \gg g$$

$\Rightarrow$ Helt OK å neglisjere ytre kraft (mg) i kollisjonsøyeblikket

Rakettprinsippet

$$\leftarrow u \cdot dm \quad \leftarrow m \rightarrow \quad dp = m \cdot du$$

Eksos, dm pr tidsenhet dt , sendes bakover med fart u .

Pga impulsbevarelse øker raketts fart:

$$m \cdot du = u \cdot dm$$

$$N2 \text{ for raketten: } m \frac{du}{dt} = F_{\text{skyr}} \text{ med } F_{\text{skyr}} = u \cdot \frac{dm}{dt}$$

I tyngdefeltet kommer tyngdekraften i tillegg.

$$\text{Ved oppskyting: } m \frac{du}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg$$

Anta $v(0) = 0$, u og g konstante. Multipliser med $\frac{dt}{m}$ og integrer

$$\Rightarrow \int_0^{v(t)} dv = u \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{dm}{m} - g \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \underline{v(t)} = u \ln \frac{m(t)}{m(0)} - gt = |u| \ln \frac{m(0)}{m(t)} - gt \quad \left[\begin{array}{l} u < 0 \\ m(t) < m(0) \end{array} \right]$$

Rotasjonsdynamikk [051 10]

(29)

Anta først rotasjonsakse med fast orientering.

Beregner tilført effekt på to måter:



$$1) P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot R \cdot \omega$$

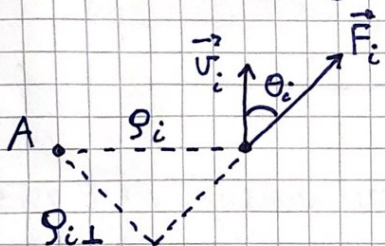
$$2) P = \frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} I_0 \frac{d\omega^2}{dt} = I_0 \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I_0 \dot{\omega}} \quad \text{med } \tau = F \cdot R = \text{kraftens dreiemoment (torque)}$$

Dette er N2 for rotasjon om akse med fast orientering

- Her: Akse gjennom CM. Ikke alltid tilfelle.
- Ligning på samme form som $F = m\dot{v}$

Generelt uttrykk for τ :



$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_i v_i \cos \theta_i$$

$$= \sum_i F_i r_i \omega \cos \theta_i = \tau \cdot \omega$$

$$\text{med } \tau = \sum_i F_i r_i \cos \theta_i = \sum_i F_i r_{i\perp}$$

Kraftens arm:

$r_{i\perp}$ = avstanden fra rot.aksen til F_i sin forlengelseslinje

Ettersom $P = dW/dt$ og $P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$

ser vi at

$$dW = \tau d\phi$$

er arbeidet utført av τ når omløpt vinkel er $d\phi$.

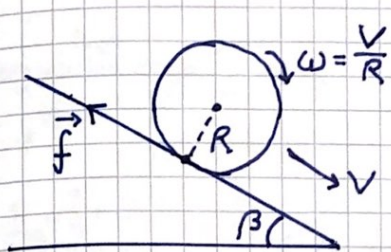
• På samme form som $dW = F \cdot dx$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow \dot{\omega} > 0$$

$$\vec{F} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \dot{\omega} < 0$$

Eks 1 : Ren rulling på skråplan (jf. s. 25)

(30)



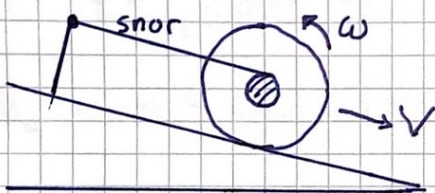
(CM) $N2: Mg \sin \beta - f = M\dot{V}$

$N2, \text{rot. om CM} : \tau = I_0 \dot{\omega} = cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R}$

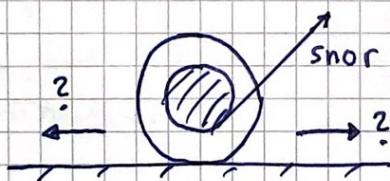
$\vec{f}$ har arm $g_{\perp} = R$; $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har null arm da de begge går gjennom CM

$\Rightarrow \tau = f \cdot R \Rightarrow f \cdot R = cMR\dot{V} \Rightarrow f = cM\dot{V}$, som innsatt i N2 gir $\dot{V} = g \sin \beta / (1+c)$, og dermed $f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$

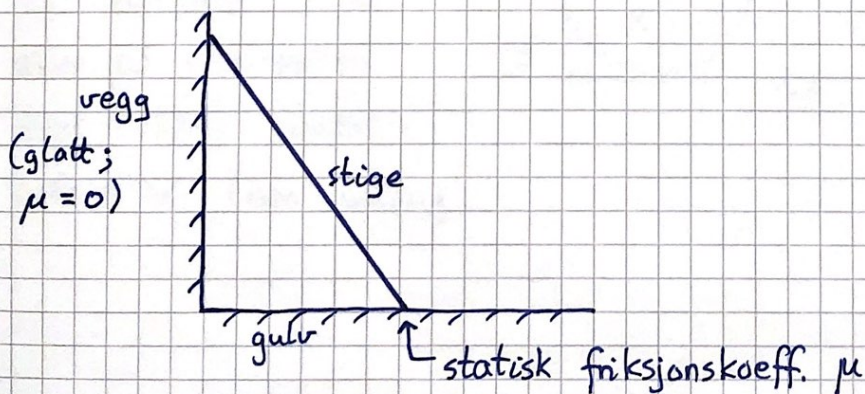
Eks 2 : Snelle baklengs på skråplan (Øving 6)



Eks 3 : Hvilken vei ruller snella ?



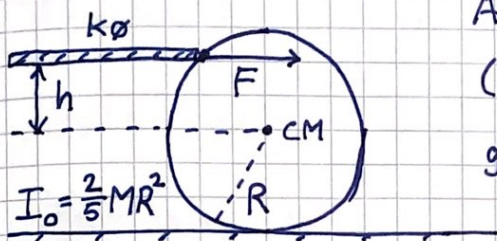
Eks 4 : Vil stigen gli ?



Eks 5 : Snooker

[051 11.1]

(31)



Anta kortvarig horisontalt støt over ($h > 0$) eller under ($h < 0$) senterlinjen gjennom CM. Anta $F \gg f$ (=friksjon) i selve støtet.

Kvalitativt: $h = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0$ (start-^{start-}vinkelfart; rett etter støtet);

$h < 0 \Rightarrow \omega_0$ mot klokka; $h > 0 \Rightarrow \omega_0$ med klokka.

Ren rulling dersom $\omega_0 = V_0 / R$ (V_0 = startfart for CM)

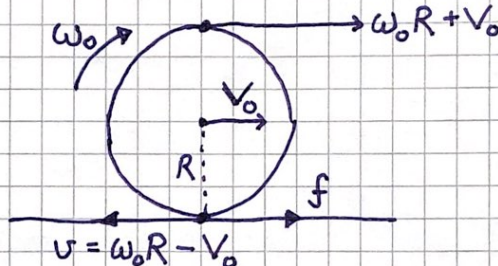
Er dette mulig? Hvis ja, hva må $h = h_0$ være da?

$$\left. \begin{array}{l} \text{N2 for CM: } F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow M V_0 = F \Delta t \\ \text{N2 rot. om CM: } \tau = I_0 \Delta \omega / \Delta t \Rightarrow I_0 \omega_0 = F h_0 \Delta t \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{h_0 = \frac{2}{5} R}}$$

Hvis $h \neq h_0$: $h = 2 \omega_0 R^2 / (5 V_0) \Rightarrow \omega_0 R = \frac{h}{h_0} \cdot V_0$

$h > h_0 \Rightarrow \omega_0 R > V_0$:

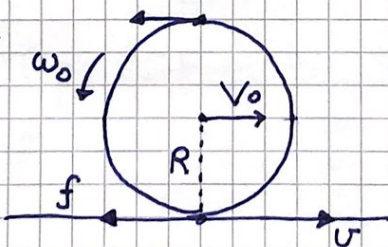
$\tau_f = f \cdot R$ (med $f = \mu_k N = \mu_k Mg$) øker V og reduserer ω inntil $\omega R = V$ (ren rulling)



$h < h_0 \Rightarrow \omega_0 R < V_0$:

τ_f reduserer V og øker ω (her: positiv med klokka) inntil

$\omega R = V$ (ren rulling)



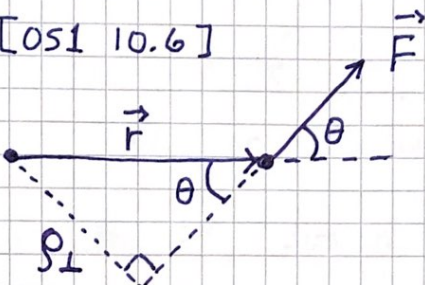
Rotasjonsdynamikk med vektorer

(32)

Nødvendig når $\vec{\omega}$ endrer retning.

Dreiemoment [OS1 10.6]

Referansepunkt;
vi velger origo



$\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$ = kraftens dreiemoment, relativt origo

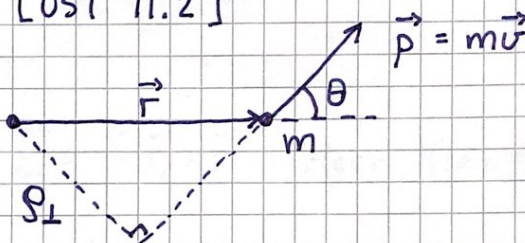
$\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{F}$ (her: ut av planet, med HHR)

$\tau = |\vec{\tau}| = r F \sin \theta = r_{\perp} F$; $r_{\perp}$ = kraftens arm (som før)

Hvis flere ytre krefter: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Dreieimpuls [OS1 11.2]

Samme ref. pkt.
som for $\vec{\tau}$



$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$ = massens dreieimpuls, relativt origo

$\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{p}$

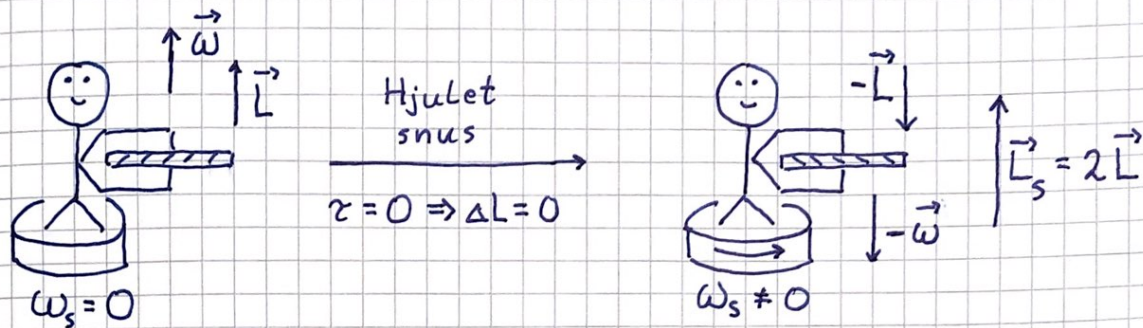
$L = |\vec{L}| = r p \sin \theta = r_{\perp} p$

Hvis flere partikler (partikkelsystem):

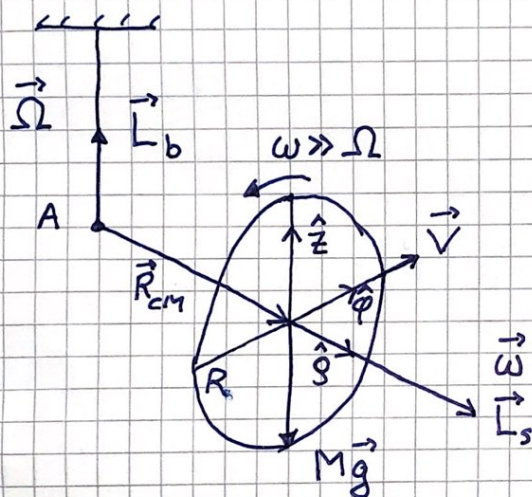
$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ (evt. $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$)

Eks 1: Dreieimpulsbevarelse på kontorstol

(34)



Eks 2: Presesjon [osl 11.4]



$$I_0 \approx MR^2$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = 2\pi/\Omega \approx 5 \text{ s}$$

$$\text{Bestem } T_\omega = 2\pi/\omega$$

Løsning: Velger A som ref.punkt, og bruker $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$.

- $\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg \hat{\phi}$
- $\omega \gg \Omega \Rightarrow L_s \gg L_b \Rightarrow \vec{L} \approx \vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$
- $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega d\hat{g}/dt$
- $\hat{g}$ roterer om z-aksen med vinkelfart $\Omega \Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \Omega \hat{\phi}$
- Dermed: $R_{cm} Mg = MR^2 \omega \Omega \Rightarrow \omega = R_{cm} g / (R^2 \Omega)$
- $\omega = 2\pi/T_\omega$ og $\Omega = 2\pi/T_\Omega \Rightarrow T_\omega = (2\pi R)^2 / (R_{cm} g T_\Omega)$
- Her er $\pi R \approx 1 \text{ m}$ og $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ slik at $T_\omega \approx 0.4 \text{ s}$;
tilsvarende $f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5$ omløp pr sekund
 $= 150 \text{ rpm}$ (revolutions per minute)

Svingninger

[OS1 15]

(35)

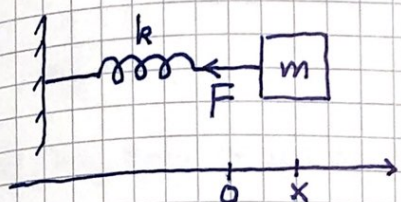
Periodisk (gjentakende) oppførsel omkring en likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomene i molekyler og krystaller.

Ladning og strøm i elektriske kretser.

Harmonisk oscillator

[OS1 15.1]



$x(t)$ = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt, $F = 0$

$x > 0$: strukket fjær, $F < 0$

$x < 0$: sammenpresset fjær, $F > 0$

Hookes lov : $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

N2: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med $\omega_0^2 = k/m$

Løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ evt $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

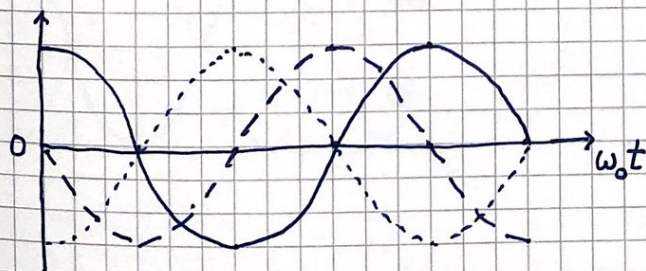
φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

A og φ (evt B og C) fastlegges med to startbetingelser,

f.eks kjennskap til $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

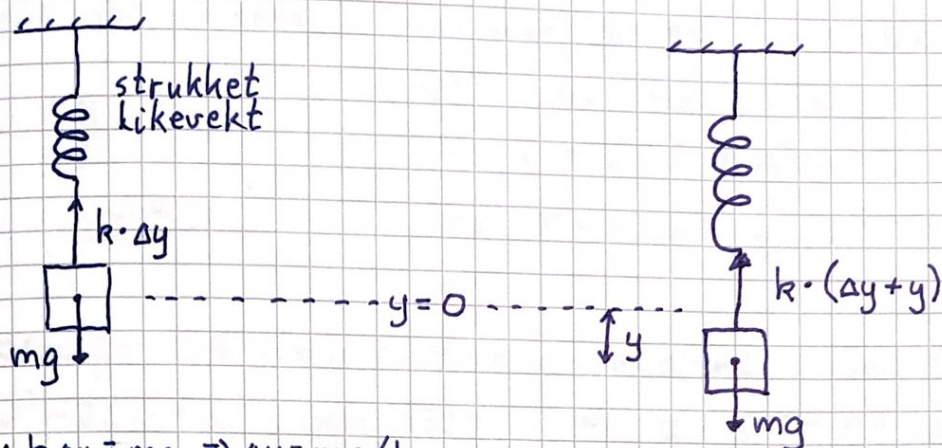
Med $\varphi = 0$ er $x = A \cos \omega_0 t$; $\dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$ og $\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$



— x
- - $\dot{x}$
... $\ddot{x}$

Masse og fjær i tyngdefeltet:

(36)



$$N1: k\Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$\Rightarrow$ Harmonisk svingning om strukket likevekt; uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2]

Anta $\varphi = 0$ og $x(t) = A \cos \omega_0 t$; $\dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$

Pot. energi:

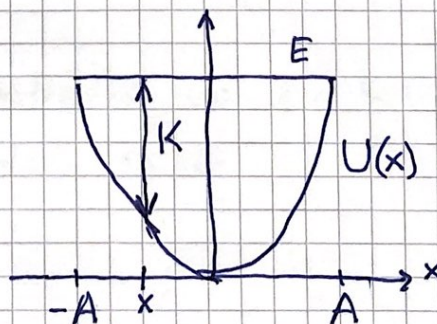
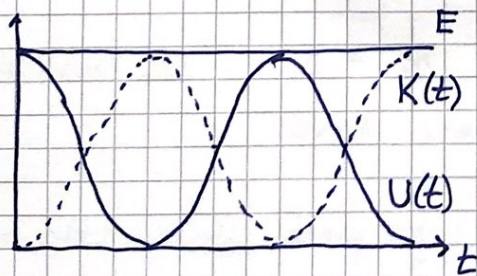
$$U = -\int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kin. energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mek. energi: $E = K + U = \frac{1}{2} kA^2$ uavh. av t

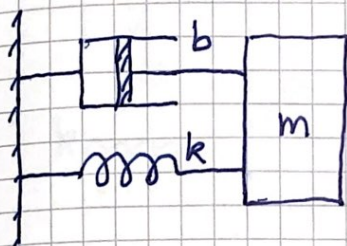
Dvs: Fjærkraften er konservativ



Dempet fri svingning [OS1 15.5]

(37)

Anta friksjonskraft prop. med farten: $f = -b\dot{x}$



$$\text{N2: } -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m \text{ og } \omega_0^2 = k/m$$

Løsninger må være på formen $\exp(-\alpha t)$; innsetting gir:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] \exp(-\alpha t) = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow x(t) = (A + Bt) \exp(-\gamma t)$

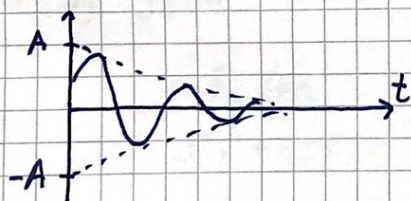
Svakeste demping som ikke gir svingninger. Bra i støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t)$$

Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; $i = \sqrt{-1}$
 $\exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$

Reell løsning: $x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi)$; harm. svingn. med eksponentielt avtagende amplitude $A \exp(-\gamma t)$



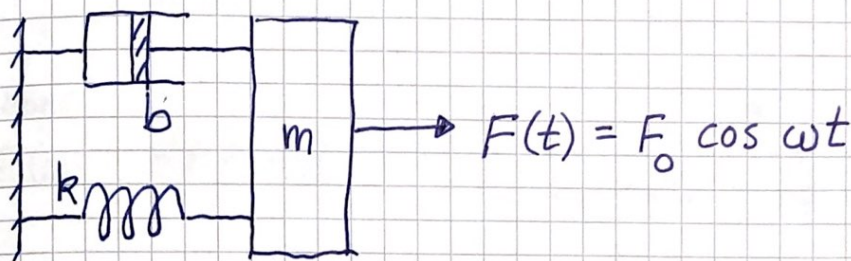
Omhyllningskurver:

$$\text{-----} \pm A e^{-\gamma t}$$

Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ er et omtrentlig mål for hvor lenge svingeberegelsen varer

Har ofte svak demping:

$$\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen del x_h oppfyller homogen ligning:

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

$\Rightarrow x_h(t)$ prop. med $\exp(-\gamma t)$ og dempes ut etter innsvingningsforløp med varighet ca $5\tau = 5/\gamma$. ($e^{-5} < 1\%$)

Etter dette er $x(t) \approx x_p(t)$, som må være på formen

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] = A(\omega) \{ \sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega) \}$$

Innsetting av x_p , $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir 2 ligninger på formen

$$\sin(\omega t) \cdot f_1(A, \varphi) = 0 \quad \text{og} \quad \cos(\omega t) \cdot f_2(A, \varphi) = 0, \quad \text{slik at}$$

$f_1 = 0$ og $f_2 = 0$ fastlegger A og φ . Løsningen er:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right]$$

Resonans: Svak damping ($\gamma \ll \omega_0$) og en ytre kraft med frekvens $\omega \approx \omega_0$ gir en stor amplitude A , og dermed mye energi

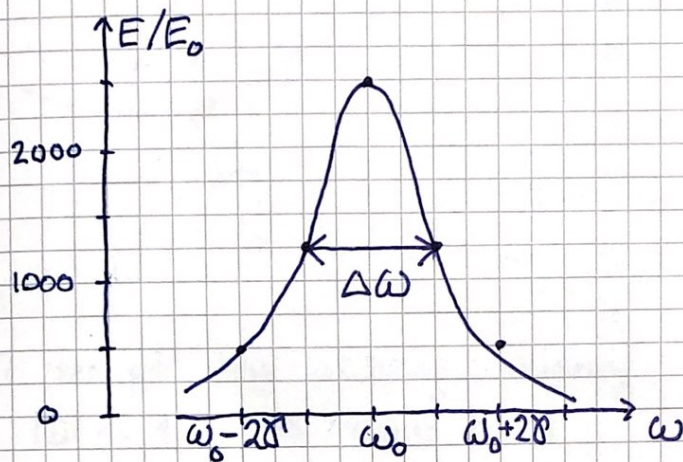
$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

i oscillatoren.

Eks: Anta svak damping, $\gamma = \omega_0/100$, og plott $E(\omega)$ (39)

Løsn:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad \text{med } E_0 = \frac{F_0^2}{2k}$$



$$E(\omega_0) = 2500 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$$

Resonanskurvens halvverdibredde

(FWHM : Full Width at Half Maximum) :

$$\Delta\omega = 2\gamma = b/m$$

Oscillatorens Q-faktor (godhetsfaktor; Quality factor):

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

Svak damping $\Rightarrow Q \gg 1$ og smal resonanskurve

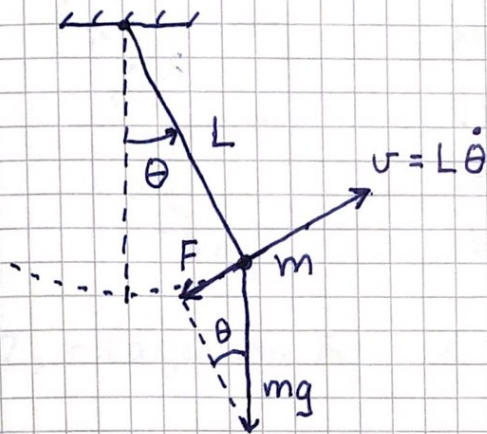
$$\text{Her : } \Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/50 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q=50}$$

Pendler

[051 15.4]

(40)

Matematisk pendel : Punktmasse i masseløs stang/snor



N2 || sirkelbanen :

$$F = ma$$

med

$$F = -mg \sin \theta$$

$$a = \dot{v} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + (g/L) \sin \theta = 0$$

Vi ser på små utsving omkring likevekt:

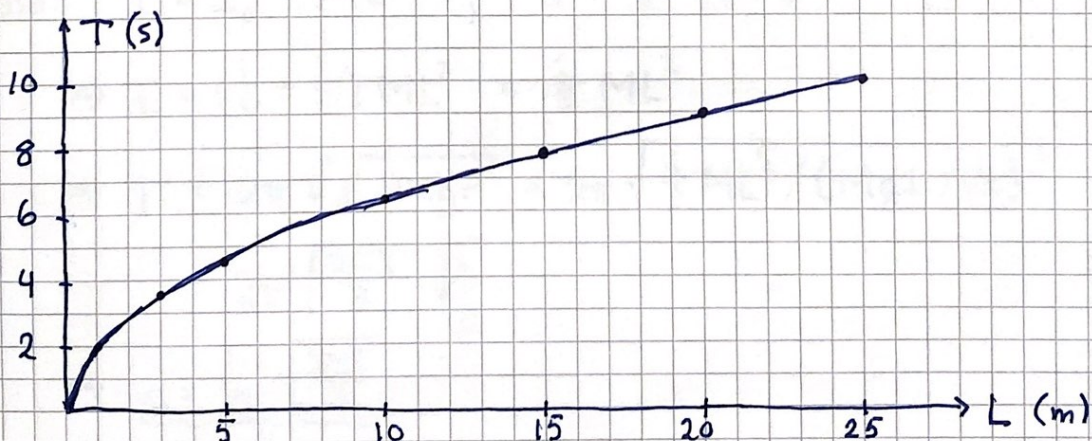
$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

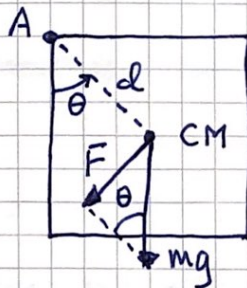
Eks: Foucaultpendelen i Realfabbygget

$$L = 25 \text{ m} \Rightarrow \text{Periode } T = 2\pi/\omega_0 \approx \underline{10 \text{ s}}$$



Fysisk pendel: Stivt legeme; svinger om akse A
i avstand d fra CM.

(41)



Masse: m

Trehetsmoment mhp A: I

Dreiemoment mhp A:

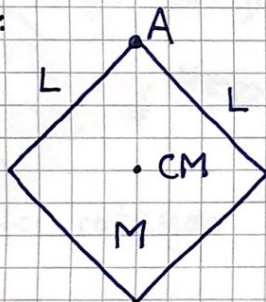
$$\tau = -F \cdot d = -mgd \sin \theta$$

$$\text{N2, rotasjon om A: } \tau = I \ddot{\theta} \Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + (mgd/I) \sin \theta = 0$$

Antar også her små utsving slik at $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = mgd/I$$

Eks:



Svingetida er $T = c \cdot \sqrt{L/g}$

Bestem konstanten c .

(Test 6, Oppg. 4: $I_0 = \frac{1}{6} ML^2$)

$$\text{Løsn: } I = I_0 + Md^2 \quad ; \quad d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{L^2 + L^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) ML^2 = \frac{2}{3} ML^2$$

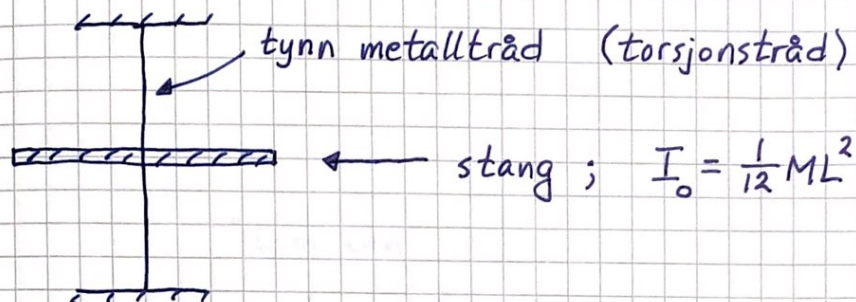
$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{I/Mgd} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} ML^2 / (MgL/\sqrt{2})}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\Rightarrow \underline{c = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

Torsjionspendel:

(42)



Tråden vris når stanga dreies en vinkel θ , slik at tråden påvirker stanga med et dreiemoment som er prop. med θ :

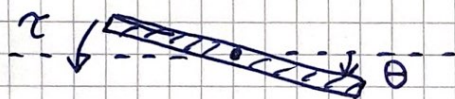
$$\tau = -\kappa \theta$$

Retvingen er tilbake mot likevekt ($\theta = 0$).

Trådens torsjonsstivhet: κ Enhet: $[\kappa] = \text{N} \cdot \text{m}$

(κ avhenger av trådens diameter, lengde og type materiale)

Sett langs torsjonstråden:



N2 for rotasjon om tråden: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ med } \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}$$

Vårt oppsett: $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$, $T = 0.8 \text{ s}$

Da kan κ fastlegges eksperimentelt:

$$\kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \approx \underline{\underline{0.003 \text{ N} \cdot \text{m}}}$$

MEKANIKK. ET LITE SAMMENDRAG I FORM AV FORMLER.

- Newtons andre lov: $F = dp/dt$ $p = mv = m\dot{r}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = F \cdot dr$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(r) = - \int_{r_0}^r F \cdot dr$ $F = -\nabla U(r)$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $f = -kv$ Luftmotstand (stor v): $f = -Dv^2 \hat{v}$
- Tyngdepunkt: $R_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i r_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int r \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\tau = r \times F$ Statisk likevekt: $\sum F_i = 0$ $\sum \tau_i = 0$
- Dreieimpuls: $L = r \times p$ N2 rotasjon: $\tau = dL/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $L = L_b + L_s = R_{CM} \times MV + I_0 \omega$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0 \omega^2$
- Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
 Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
 Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellakse-teoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $F = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $g = F/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
 Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
 Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
 $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
 Underkritisk damping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
 Overkritisk damping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 Kritisk damping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
 amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
 halvverdbredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

ELEKTROMAGNETISME

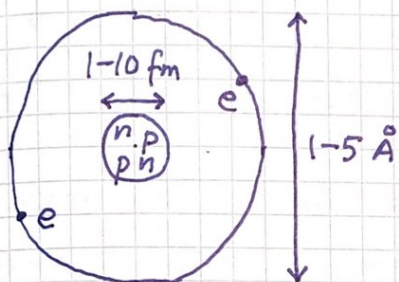
44

Elektrostatikk

[OS2 5-8]

Ladning [OS2 5.1]

Bohrs atommodell (1913; NP1922):



Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}; 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} \text{ (ångström)}$$

Ladning er krantisert i enheter av elementærladningen

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Symbol for ladning: q, Q Enhet: $[q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom, atomnummer Z :

$$Z \text{ protoner, } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$$

Ioner: Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

Eks: $\text{Na}^+, \text{Mg}^{2+}, \text{Cl}^-, \text{NH}_4^+, \text{OH}^-$

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner i atomkjernen

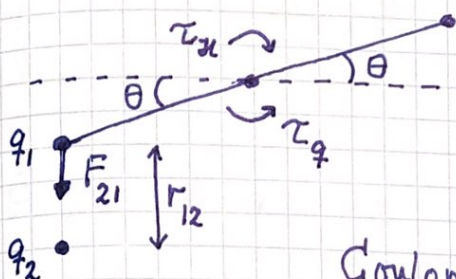
Eks: $^{12}\text{C}, ^{13}\text{C}, ^{14}\text{C}$; $Z=6 \Rightarrow$ hhv 6, 7, 8 nøytroner

^4_2He (ovenfor), ^3_2He

Coulombs lov [OS2 5.3]

(45)

Coulomb, 1785:



Torsjonspendel, sett ovenfra

Likerekt når $\tau_q = \tau_{\theta}$

$$\tau_{\theta} = \kappa \theta \quad (5.42)$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta$$

Coulomb fant: $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$

Tiltrekning / Frastøtning mellom ulike / like typer ladning:



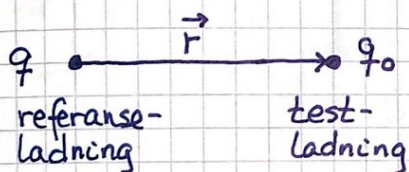
Coulombs lov:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{21}$$

$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = \text{vakuumpermittiviteten}$

($\Rightarrow 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$)

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5]



Kraft fra q på q_0 :

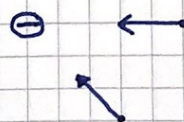
$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ el. kraft pr ladningsenhet

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \quad ; \quad [E] = \text{N/C}$$

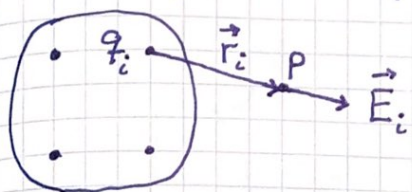
En punktladning q omgir seg med et elektrisk felt:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad ; \quad \text{retning bort fra / inn mot pos. / neg. ladning}$$



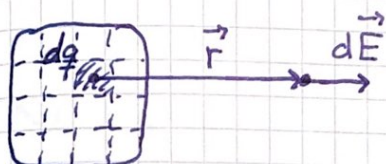
$\vec{E}$ fra system med flere punktladninger:

(46)



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

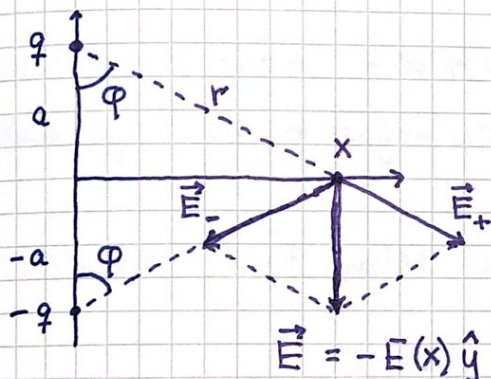
$\vec{E}$ fra kontinuerlig ladningsfordeling:



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Elektrisk dipol

$\pm q$ i $y = \pm a$; bestem $\vec{E}$ på x-aksen



$$E = 2E_+ \cos\phi \quad (E_- = E_+)$$

$$\cos\phi = a/r = a/\sqrt{x^2 + a^2}$$

$$E_+ = q/4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Langt unna dipolen, dvs $x \approx r \gg a$:

$$\vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa/4\pi\epsilon_0 r^3$$

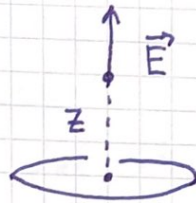
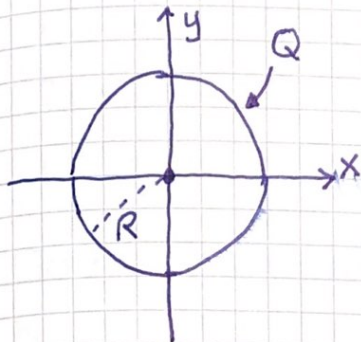
$\vec{E}_+$ og $\vec{E}_-$ kansellerer delvis. Dermed går $E(r)$ raskere mot null enn fra en enkelt punktladning.

Punktladning: $E(r) \sim 1/r^2$

Dipol: $E(r) \sim 1/r^3$

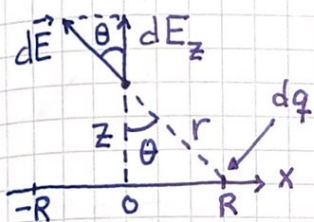
Eks 2: Jevnt ladet ring, $\vec{E}$ på symmetriaksen

(47)



Pga symmetri:

$$\vec{E} = E(z) \hat{z}$$



Felt fra dq : $dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$

med z -komponent $dE_z = dE \cdot \cos \theta$

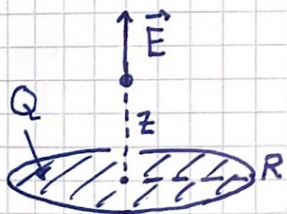
Fra figur: $\cos \theta = z/r$; $r^2 = z^2 + R^2$

$$\Rightarrow E(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Langt unna ringen, $z \gg R$: $E(z) = Q / 4\pi\epsilon_0 z^2$

Rimelig; da ser ringen ut som en punktladning Q i origo.

Eks 3: Jevnt ladet skive, $\vec{E}$ på symmetriaksen



Strategi: Skiva = (∞) mange tynne ringer med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r dr$,

ladning $dq = Q dA / A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2$, som bidrar med $dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}$ til feltet $\vec{E} = E(z) \hat{z}$ på z -aksen.

Integrasjon fra $r=0$ til $r=R$ gir

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \left(1 + R^2/z^2 \right)^{-1/2} \right\}$$

Viktigst for oss: Nær skiva, dvs $z \ll R$

Da er: $E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; uavhengig av z !

Skivas ladning pr flateenhet: $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$

Feltlinjer for $\vec{E}$ [052 5.6]

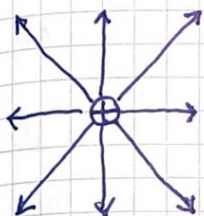
(48)

Gir et bilde av $\vec{E}$ omkring ladningene

Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning

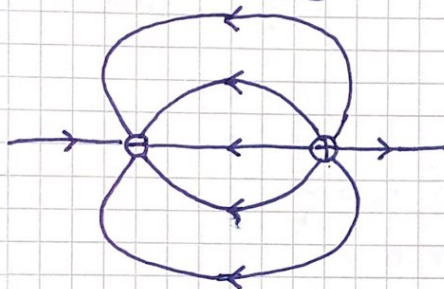


$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

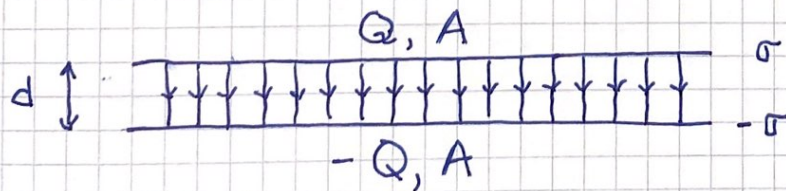
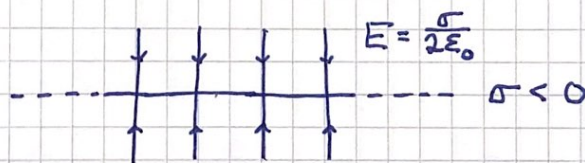
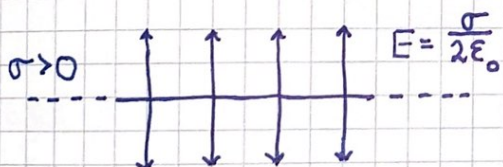


Ser at feltlinjer starter på positive og ender på negative ladninger

Eks 2: Dipol



Eks 3: Jevnt ladet plate og parallelplatekondensator



Når $d \ll \sqrt{A}$, er $\vec{E}$ omtrent konstant mellom platene.

Feltstyrke: $E = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0$

Utenfor volumet mellom platene: $E \approx 0$

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7]

(49)

En enkel dipol, $-q \xrightarrow{d} q$, har dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$

Flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

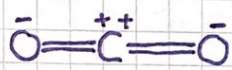
Kontinuerlig ladningsfordeling : $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

En dipol har nettoladning null: $\sum_i q_i = 0$ evt $\int dq = 0$

SI-enhet: $[p] = C \cdot m$

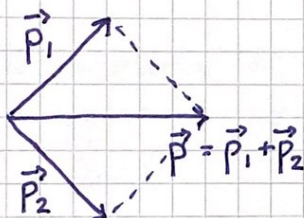
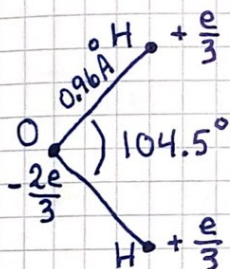
Enheden debye : $1D = 10^{-21} C \cdot m / 299792458 \approx 3.336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$

Eks 1: CO_2



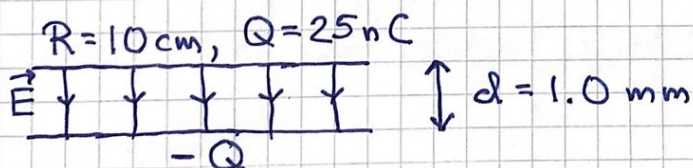
$p=0$

Eks 2: H_2O



$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot 0.96 \text{ \AA} \cdot \cos 52.25^\circ \\ &= 0.39 e \text{ \AA} = 6.3 \cdot 10^{-30} C \cdot m \\ &= 1.89 D \end{aligned}$$

Eks 3: Platekondensator



Beregn E og p

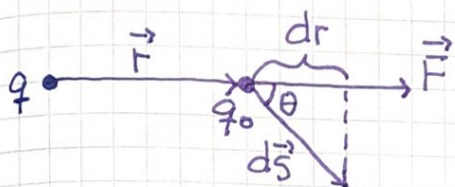
$$\sigma = Q/A = 25 \cdot 10^{-9} C / \pi \cdot (0.10 m)^2 = 8.0 \cdot 10^{-7} C/m^2$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 = 9.0 \cdot 10^4 N/C$$

$$p = Q \cdot d = 2.5 \cdot 10^{-11} C \cdot m$$

Potensiell energi og elektrisk potensial [052 7.1-7.2] (50)

Endring dU i pot. energi for ladningspar når $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{s}$:



$$\begin{aligned} dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= -F \cdot dr = -q q_0 dr / 4\pi \epsilon_0 r^2 \end{aligned}$$

Vi velger $U=0$ når $r \rightarrow \infty$. Da er:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \frac{q q_0 dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{pot. energi for ladningspar}$$

q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ Pot. energi pr ladningsenhet

$$\Rightarrow V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{potensialet som } q \text{ omgir}$$

seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

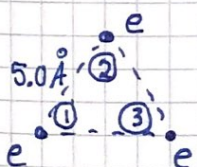
Enhet: $[V] = V$ (volt)

$$\Rightarrow [E] = V/m$$

Nyttig energienhet på atomært nivå:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV (elektronvolt)} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \\ &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Eks 1: U for flere punktladninger



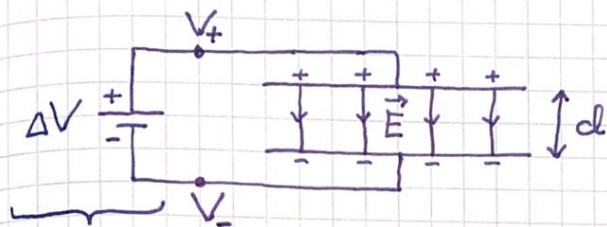
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \text{bidrag fra paret } q_i \text{ og } q_j$$

$$\Rightarrow U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = 3 \cdot \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \cdot 5.0 \text{ Å}}$$

$$= 1.38 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \underline{8.64 \text{ eV}} \quad [\text{Alle par bidrar}]$$

Eks 2: Platekondensator. Kapasitans. [052 8]

(51)



$$R = 10 \text{ cm}, \quad d = 1.0 \text{ mm}$$

$$\Delta V = 30 \text{ V}$$

Likespenningskilde: Sørger for potensialforskjell (spenning) $\Delta V = V_+ - V_-$ mellom de to kontaktene (polene).

Kondensatorens kapasitans:

$$C = Q / \Delta V \quad \text{Enhet: } [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Symbol i elektriske kretser:

Bestem E , $\pm Q$ og C for kondensatoren ovenfor.

Løsning:

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d$$

$$\Rightarrow E = \Delta V / d = 30 \text{ V} / 0.001 \text{ m} = \underline{30 \text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow Q = \sigma A = \epsilon_0 E \cdot \pi R^2 = \underline{8.3 \text{ nC}}$$

$$C = Q / \Delta V = \sigma A / E d = \underline{\epsilon_0 A / d} = \underline{0.28 \text{ nF}}$$

Enhet for permittivitet:

$$[\epsilon_0] = [C \cdot d / A] = F/m$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4]

(52)

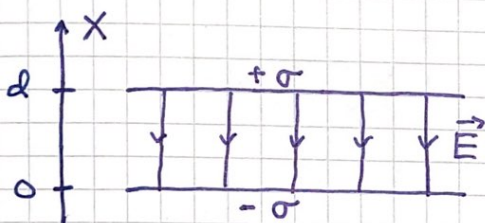
Fra s.16: $\vec{F} = -\nabla U$ Med $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$ følger:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks 1: Punktladning

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r; \text{ kulesymmetri, da er } \nabla = \hat{r} \frac{d}{dr}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} dV/dr = \hat{r} q/4\pi\epsilon_0 r^2 \quad OK$$

Eks 2: Platekondensator



Anta $V(0) = 0$.

Bestem $V(x)$.

Løsn 2: Vet fra før at $\vec{E}(x) = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$ mellom platene og at $E=0$ utenfor. Da må vi finne en $V(x)$ slik at $\vec{E} = -\nabla V(x) = -\hat{x} dV(x)/dx$.

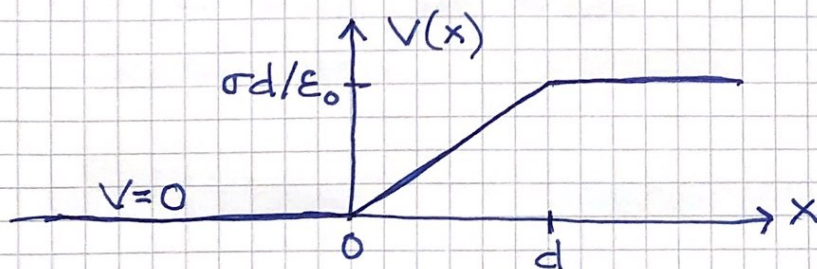
Dvs: $dV/dx = \sigma/\epsilon_0$ og $V(0) = 0$

$\Rightarrow V(x) = \sigma x/\epsilon_0$ mellom platene

Utenfor er $E=0$, og dermed $V = \text{konstant}$.

Kontinuerlig $V(x)$ gir $V(x)=0$ for $x \leq 0$ og

$V(x) = \sigma d/\epsilon_0$ for $x \geq d$.



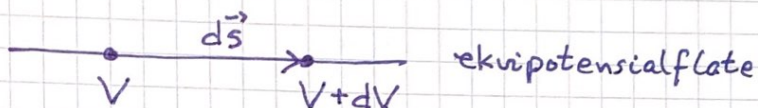
Ekvipotensial [052 7.5]

(53)

... er et område (kurve, flate eller volum) der V er konstant.

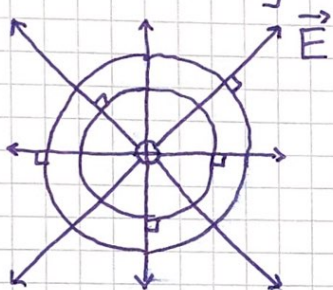
$\vec{E}$ står normalt på ekvipotensialflatene.

Beris:



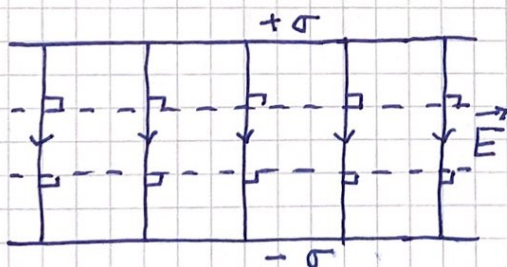
$$dV = 0 \Rightarrow -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s} \quad (\text{ged})$$

Eks 1: Punktladning



$\Rightarrow$ Kuleskall som ekvipot. flater

Eks 2: Platekondensator



$\Rightarrow$ Plan $\perp \vec{E}$ som ekvipot. flater
(mellom platene)

Materialers elektriske egenskaper

54

Leder / Metall

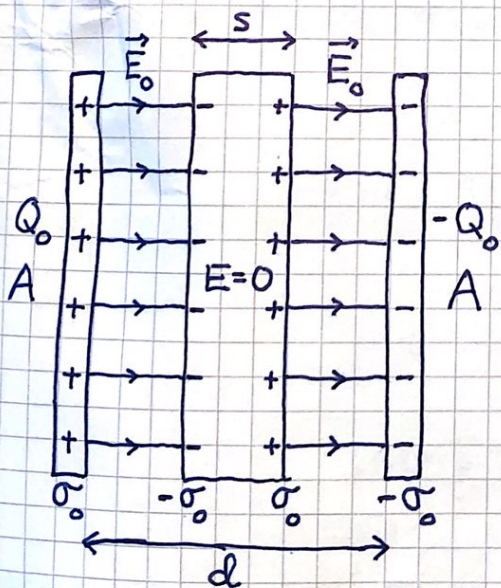
[OS2 7.5, 6.4]

Har frie elektroner (1-3 pr atom) som i felt $\vec{E} \neq 0$ vil settes i bevegelse; $\vec{a} = \vec{F}/m_e = -e\vec{E}/m_e$ (N2).

Dermed, for metall i elektrostatisk likevekt:

- $E=0$ inni et metall
- All nettoladning ligger på overflaten [Gauss' lov; ikke pensum]
- På overflaten: $E_{||} = 0$, $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$ ($\sigma = Q/A$)
- Er et ekvipotensial, da $\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = 0$ for enhver forflytning i eller på metallbiten
- Metall med hulrom har $E=0$ inni hulrommet og all nettoladning på ytre overflate. (Ingen elektrostatisk forskjell med og uten hulrommet.)

Ekst 1: Platekondensator delvis fylt med metallskive



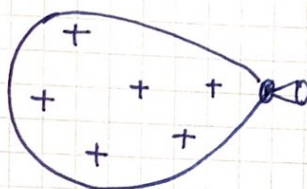
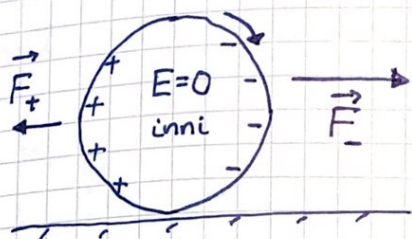
I likevekt er totalt felt $E=0$ inni metallskiva. Da må feltet $\vec{E}_0$ fra $\pm\sigma_0$ på kondensatorplatene indusere like mye ladning $\mp\sigma_0$ på metallskivas overflater. Da blir $E=0$ inni metallskiva mens det forblir $E_0 = \sigma_0/\epsilon_0$ i områdene mellom metallskiva og kondensatorplatene.

Kapasitans:

$$\Delta V = E_0 \cdot (d-s) = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A} \cdot (d-s) \Rightarrow C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{\epsilon_0 A}{d-s}$$

Eks 2: Faradaybur metallboks m /hulrom

(55)



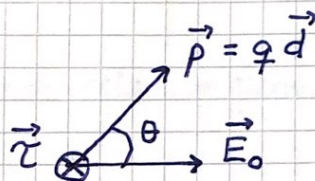
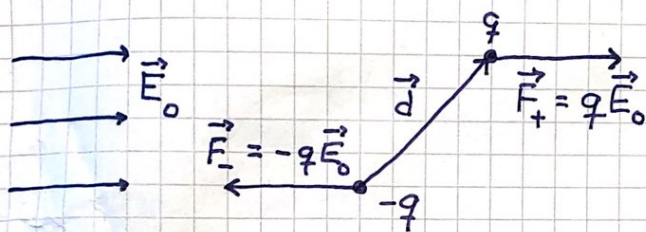
ballong m /ladning

$$F_- > F_+$$

$\Rightarrow$ Netto tiltrekning

Isolator/Dielektrikum [OS2 8.5]

Har ikke frie elektroner. Men har bundet ladning som gir polarisering i et ytre felt $\vec{E}_0$. Molekyler dipol:

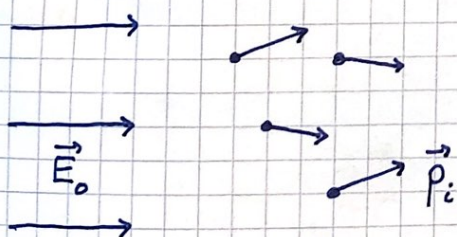


Dreiemoment på dipolen: $\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$$\Rightarrow \tau = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot qE_0 \cdot \sin\theta = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta = |\vec{p} \times \vec{E}_0| \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0}$$

Pot. energi: $U = -\int \tau d\theta = -pE_0 \cos\theta \Rightarrow \boxed{U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0}$

$\Rightarrow$ Dipolene rettes inn langs det ytre feltet:



polarisering $\stackrel{\text{def}}{=}$ dipolmoment pr
volumenhet

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{P}_i}{V}; [P] = C/m^2$$

Eks: Hva er max P i vann?

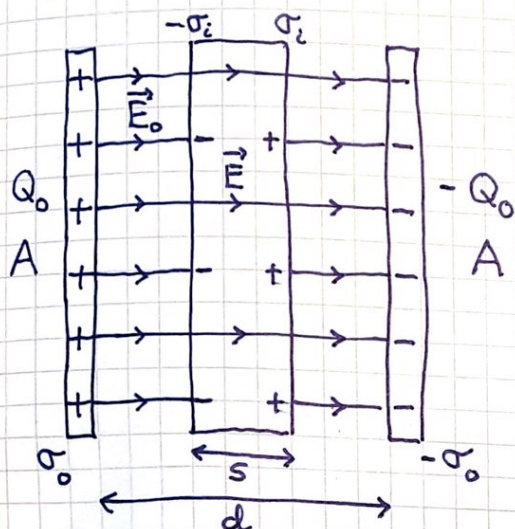
Løsning: 18 g/mol , 10^6 g/m^3 , $6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ og $p \approx 3 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$ (s.49)

$$\Rightarrow P_{\text{max}} \approx 0.1 \text{ C/m}^2$$

Nettoeffekt for isolator i ytre felt $\vec{E}_0$:

(56)

Indusert ladningstetthet $\pm \sigma_i$ på overflaten og svekket felt inni isolatoren.



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$$

$$E = E_0 - E_i < E_0$$

$$E_0 = \sigma_0 / \epsilon_0$$

$$E_i = \sigma_i / \epsilon_0$$

Antar linear respons:

E_i prop. med E_0 , og dermed

$E \parallel E_0$

Tallfestes med $\epsilon_r = E_0 / E$ = isolatorens relative permittivitet.

Kapasitans:

$$\Delta V = E_0 \cdot (d-s) + E \cdot s = E_0 \cdot (d-s) + \frac{E_0}{\epsilon_r} \cdot s = Q_0 \left[\frac{d-s}{\epsilon_0 A} + \frac{s}{\epsilon_r \epsilon_0 A} \right]$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \epsilon_0 A \cancel{\frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 A}} \cdot \left[d-s + \frac{s}{\epsilon_r} \right]^{-1}$$

Hvis isolator i hele volumet: $s=d \Rightarrow C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d$

dvs en faktor $\epsilon_r > 1$ større enn med luft (vakuum).

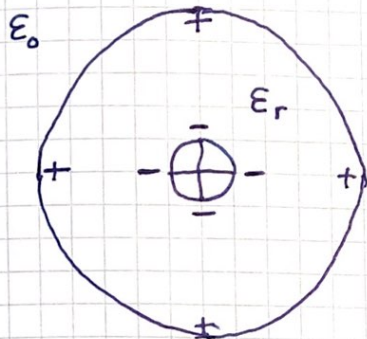
Isolatorens permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \Rightarrow C = \epsilon A / d$

Noen tallverdier:

	vakuum	tørr luft	plast	rent vann	perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2-6	80	∞

Felt omkring et ion inni en isolator:

(57)



$$E = E_0 - E_i = E_0 / \epsilon_r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Utenfor isolatoren: $E = E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Elektromagnetiske bølger og lysfarten i en isolator:



$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t), \quad \vec{B}(x,t) = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi f, \quad v = \lambda \cdot f$$

$$\vec{E} \perp \vec{v}, \quad \vec{B} \perp \vec{v}, \quad \vec{E} \perp \vec{B}$$

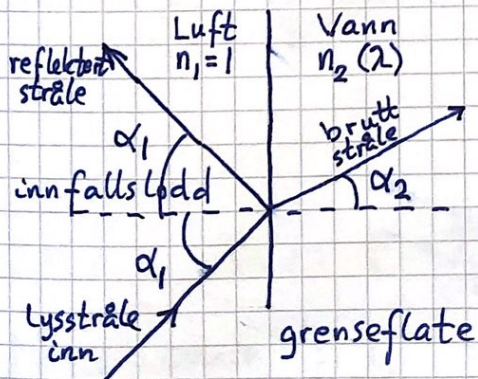
$$v = c/n; \quad n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r(\lambda)} = \text{isolatorens brytningsindeks}$$

Synlig lys: $\lambda = 400 - 700 \text{ nm}$

$$n(\lambda) \approx 1.3 \text{ for vann}$$

$$\Rightarrow v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} / 1.3 \approx 2.3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Regnbuen:



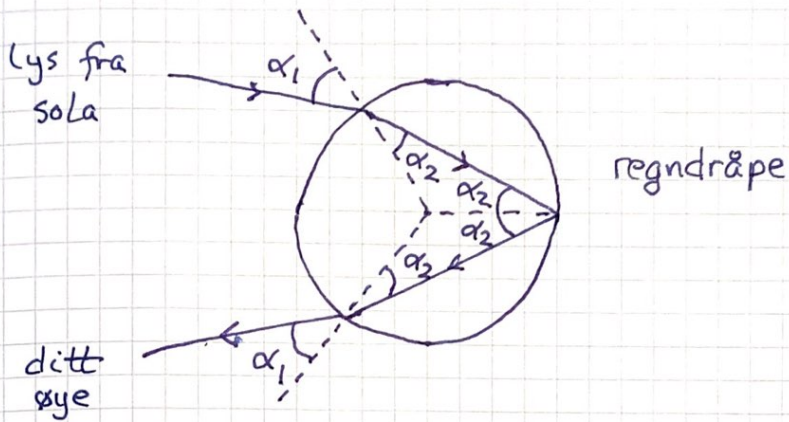
Reflektert stråle: Samme vinkel som innkommende stråle.

Snells lov for brytstråle:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

n_2 varierer fra 1.345 for

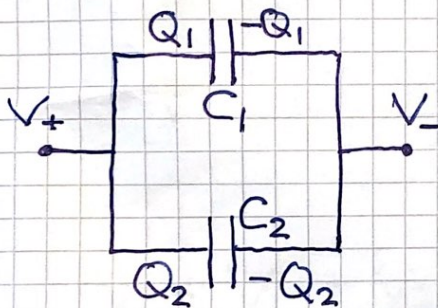
$\lambda = 400 \text{ nm}$ (fiolett) til 1.331 for $\lambda = 700 \text{ nm}$ (rødt)



Minste n_2 -verdi gir største $\alpha_2 \Rightarrow$ Rødt brytes minst og fiolett brytes mest. $\Rightarrow$ Regnbue !!

Kobling av kapasitanser [OS2 8.2]

Parallellkobling:



Lik spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = Q_1/C_1 = Q_2/C_2$$

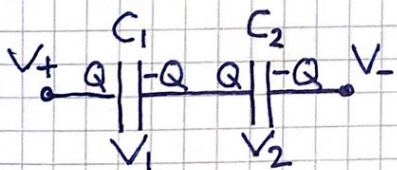
Total ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

$\Rightarrow$ Total kapasitans:

$$C = Q/V = C_1 + C_2$$

Seriekobling:



Lik ladning på C_1 og C_2 :

$$Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

Total spenning over C_1 og C_2 :

$$V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = Q/C_1 + Q/C_2$$

$\Rightarrow$ Total kapasitans:

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

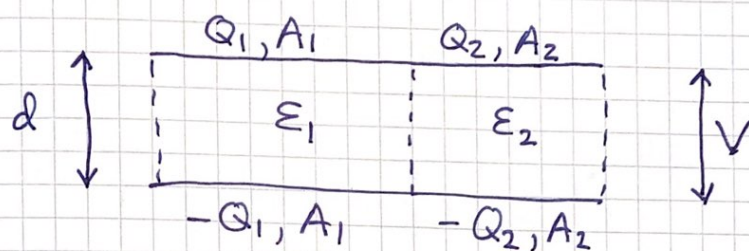
$$N \text{ i parallell: } C = \sum_{j=1}^N C_j$$

$$N \text{ i serie: } C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}$$

Kondensator fylt med to ulike dielektrika:

(59)

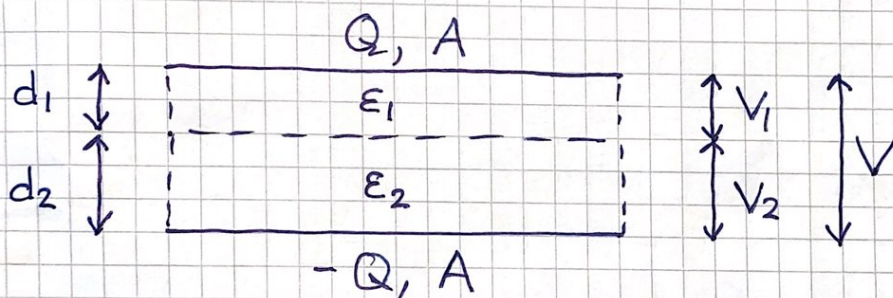
"Parallellkobling":



$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

"Seriekobling":



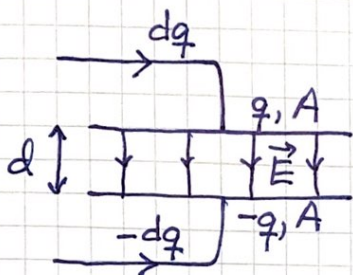
$$V = V_1 + V_2$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}$$

Energi i $\vec{E}$ -felt [OS2 8.3]

(60)

Vi regner ut arbeidet som kreves for å lade opp en kondensator, og dermed finner vi energien som er lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Spennning mellom platene med ladning $\pm q$: $v(q) = q/C$
Økning fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ øker energien med

$$dU = v(q) \cdot dq = q \cdot dq / C$$

$\Rightarrow$ Total energi ved opplading fra $q=0$ til $q=Q$:

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / (2C) = \frac{1}{2} C V^2$$

Her er $C = \epsilon_0 A / d$ og $V = E \cdot d$ slik at

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (A \cdot d)$$

Her er $A \cdot d$ volumet mellom platene, dvs der $\vec{E} \neq 0$.

Dermed :

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \text{energi pr volumenhet i } \vec{E}\text{-feltet}$$

(Gjelder generelt.)

Eks: Med $V = 1.0 \text{ kV}$ og ønske om å lagre 100 f pr m^2 kondensatorplateareal, hva må plateavstanden være?
(Anta luft mellom platene.)

$$\text{Løsn: } U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2 \Rightarrow d = \frac{\epsilon_0 V^2 A}{2U} = \frac{\epsilon_0 V^2 / 2}{U/A}$$

$$\Rightarrow d = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 / 2}{100} \text{ m} = 4.4 \cdot 10^{-8} \text{ m} = \underline{\underline{44 \text{ nm}}}$$

Elektrisk strøm

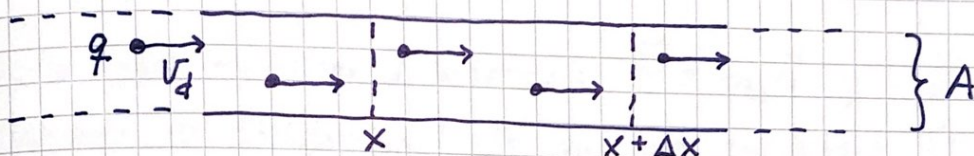
[OS2 9, 10]

(61)

Strøm. Strømtetthet

[OS2 9.1, 9.2]

Anta leder med tverrsnitt A og n frie ladninger q pr volumenhet med midlere driftsfart v_d langs lederen:



strøm(-styrke) $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengden ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt} ; [I] = \frac{C}{s} = A \text{ (ampere)}$$

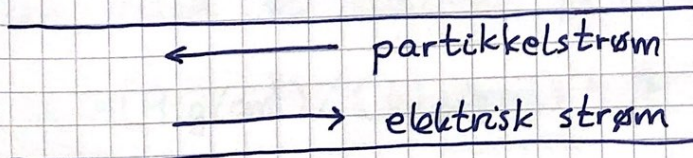
i løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$ passerer all fri ladning $\Delta Q = q n A \Delta x$ i volumet $A \Delta x$ tverrsnittet ved $x + \Delta x$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I / A = n q v_d \Rightarrow \vec{j} = n q \vec{v}_d ; [\vec{j}] = A / m^2$$

$$\text{Metall: } q = -e \Rightarrow \vec{j} = -n e \vec{v}_d$$

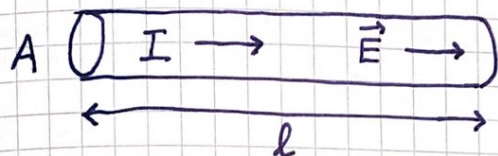


Ohms Lov

[OS2 9.2-9.4]

(62)

Anta spenning V over leder med lengde l , tverrsnitt A og strøm I :



$$V = E \cdot l, \quad I = j \cdot A$$

N2 for fritt elektron i lederen: $\vec{F} = m_e \vec{a}$; $\vec{F} = -e\vec{E}$

Kollisjoner $\Rightarrow$ Elektronene får midlere driftsfart $\vec{U}_d = \vec{a} \cdot \tau$,
der τ = midlere tid mellom kollisjoner

$$\Rightarrow \vec{j} = -ne\vec{U}_d = -ne \cdot \left(\frac{-e\vec{E}}{m_e} \right) \cdot \tau = \sigma \cdot \vec{E} \quad [\text{P. Drude, 1900}]$$

der $\sigma = ne^2\tau/m_e$ = materialets elektriske ledningsevne (konduktivitet). Dette er Ohms lov på mikroskopisk form.

$$\text{Makroskopisk: } V = E \cdot l = \frac{j}{\sigma} \cdot l = I \cdot \left(\frac{l}{\sigma A} \right) = R \cdot I$$

Lederens motstand (resistans): $R = l/(\sigma A)$; $[R] = \Omega$ (ohm)

Lederens konduktans: $G = R^{-1}$; $[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

Materialets resistivitet: $\rho = \sigma^{-1}$; $[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = S/m$

Kretssymbol:  (evt: )

Eks 1: Kopper (Cu) har molar masse 63 g/mol og massetetthet ca 9 g/cm³. Anta 1 fritt elektron pr Cu-atom og bestem antall frie elektroner pr volumenhet.

$$\text{Løsn 1: } n \approx (9 \text{ g/cm}^3) / (63 \text{ g/mol}) = \frac{1}{7} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} \approx \underline{10^{29} \text{ pr m}^3}$$

Eks 2: Anta Cu-ledning med $A = 2.5 \text{ mm}^2$ og $I = 1.0 \text{ A}$. Beregn U_d

Løsn 2:

$$U_d = \frac{I}{neA} = \frac{1.0}{10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.5 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{25 \mu\text{m/s}} \quad (!)$$

Eks 3: Beregn σ for Cu ved romtemperatur. Anta (63) en midlere fri veilengde 2 nm (mellom påfølgende kollisjoner).

Løsn 3: Elektronenes midlere kinetiske energi er $\frac{3}{2}k_B T$, slik at $\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{3}{2}k_B T \Rightarrow v = \sqrt{3k_B T / m_e} \approx 10^5 \text{ m/s}$ (med $T \approx 300 \text{ K}$)

Dermed: $\tau \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$

Dermed: $\sigma = ne^2 \tau / m_e \approx \underline{5.6 \cdot 10^7 \text{ S/m}}$ ($\approx \sigma_{\text{exp}}^{\text{Cu}} \text{ ved } 300 \text{ K}$)

Motstand og temperatur [OS2 9.3]

Metall: Økt $T \Rightarrow$ økt $v \Rightarrow$ redusert τ , mens n forblir uendret $\Rightarrow \sigma$ avtar; ρ øker

Empirisk: $\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha \cdot (T - T_0)]$

med $\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$ for diverse metaller

og $\rho_0 = \rho(T_0) =$ referanseverdi ved f.eks. 293 K

Halvleder: Si, Ge, GaAs, GaN, ...

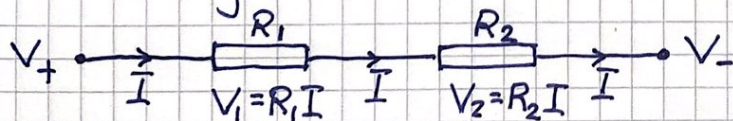
Isolator med $n \approx 0$ ved $T \approx 0 \text{ K}$.

Økt $T \Rightarrow$ flere elektroner frigjøres $\Rightarrow \rho$ avtar

Anvendelser: diode, transistor, solceller, lasere osv

Kobling av motstander [OS2 10.2]

Seriekobling:



Lik strøm I gjennom motstander i serie.

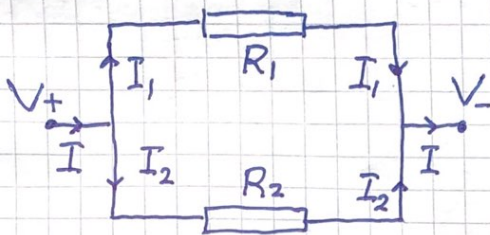
Total spenning: $V = V_+ - V_- = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I$

$\Rightarrow$ Total motstand: $R = V/I = R_1 + R_2$

N stk i serie: $R = \sum_{j=1}^N R_j$

Parallellkobling:

(64)



Lik spenning over R_1 og R_2 :

$$V = V_+ - V_- = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

Total strøm:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

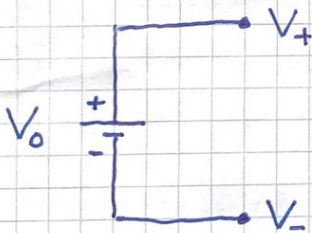
$$\Rightarrow \text{Total motstand: } R = \frac{V}{I} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$N \text{ stk i parallell: } R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1} \quad [\Rightarrow G = \sum_{j=1}^N G_j]$$

DC-kretser [052 10 (9)]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant spenning

$$V_0 = V_+ - V_-$$

mellom de to polene

Eks:

Kjemisk batteri

Solcelle

Mobillader

Kirchhoffs regler [OS2 10.3]

(65)

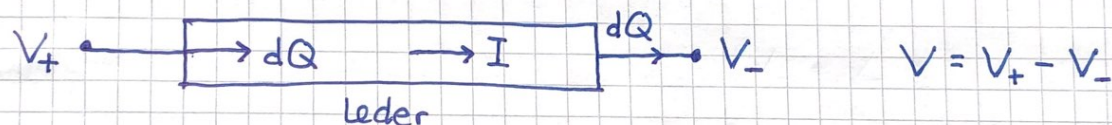
K1: Pga ladningsbevarelse er netto strøm i et knutepunkt null. Velg (f.eks) $I_j > 0$ inn mot et knutepunkt og $I_j < 0$ ut av et knutepunkt:

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt}$$

K2: Pga energibevarelse er summen av alle potensialendringer (spenninger) rundt en lukket sløyfe lik null. Velg (f.eks) $V_j > 0$ for pot.økning og $V_j < 0$ for pot.reduksjon:

$$\sum_j V_j = 0 \quad \text{rundt alle sløyfer}$$

Elektrisk effekt [OS2 9.5]



$$\text{Effekt inn: } P_{\text{inn}} = dU_{\text{inn}}/dt = V_+ dQ/dt = V_+ I$$

$$\text{Effekt ut: } P_{\text{ut}} = dU_{\text{ut}}/dt = V_- dQ/dt = V_- I$$

$$\text{Effekttap i lederen: } \underline{P} = P_{\text{inn}} - P_{\text{ut}} = (V_+ - V_-) \cdot I = \underline{V \cdot I}$$

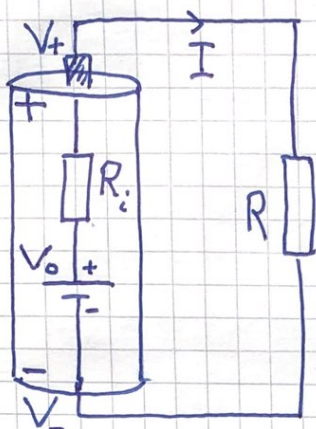
Med ohmsk motstand er $V = R \cdot I$; da har vi

$$P = VI = RI^2 = V^2/R$$

mens $P = VI$ gjelder generelt.

Eks 1: Reell vs ideell spenningskilde

(66)



$$K2: V_0 - R_i I - R I = 0$$

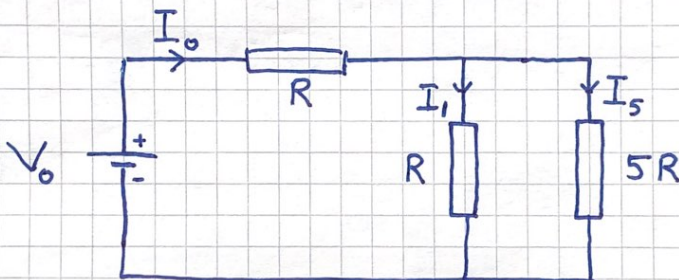
$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

R_i = indre motstand (i f.eks. et gammelt batteri)

$R_i = 0$ i en ideell spenningskilde

Polspenning: $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$

Eks 2:



Bestem total motstand R_0 og strømstyrkene I_0 , I_1 og I_5 .

$$\text{Løsn 2: } R_0 = R + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{5R} \right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{11}{6} R}}$$

$$I_0 = V_0 / R_0 = \underline{\underline{6V_0 / 11R}}$$

Spenning over parallellkoblingen:

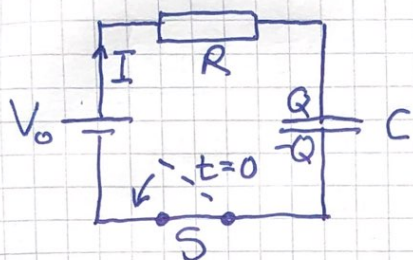
$$V_p = V_0 - R I_0 = \frac{5}{11} V_0$$

$$\Rightarrow I_1 = V_p / R = \underline{\underline{5V_0 / 11R}}, \quad I_5 = V_p / 5R = \underline{\underline{V_0 / 11R}}$$

RC-krets

[052 10.5]

(67)



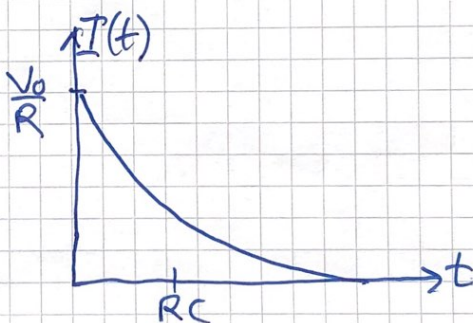
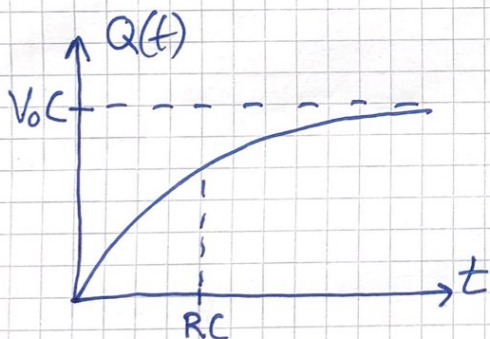
Finn $Q(t)$ og $I(t)$. Bryteren S lukkes ved $t=0$. $Q(t=0)=0$.

$$K2: V_0 - RI - Q/C = 0 \quad ; \quad I = dQ/dt$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C \Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -t/RC \Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$



$\tau = RC$ er kretsens tidskonstant, et mål for omtrent hvor lang tid det tar å lade opp kondensatoren.

Anvendelser:

Kupelys i bil.

Intervall-vindusviskere

(AC-kretser)

Magnetostatikk

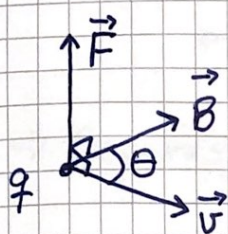
[OS2 11, 12]

(68)

Magnetisk kraft

[OS2 11.2]

Strømmer og magneter omgir seg med et magnetfelt $\vec{B}$.
En ladning q med fart $\vec{v}$ i et magnetfelt $\vec{B}$
påvirkes av en magnetisk kraft:



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = qvB \sin\theta, \quad \vec{F} \perp \vec{v} \text{ og } \vec{B}$$

Enhet: $[B] = T$ (tesla); $1T = 10^4 G$ (gauss)

Eks: Fartsfilter



⊗ inn i planet

⊙ ut av planet

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \text{Lorentzkraften}$$

$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e$ ned og $\vec{F}_m$ opp

$\Rightarrow$ ingen avbøyning hvis $v = E/B$

Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt

[OS2 11.3]



Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\Rightarrow F = qvB; \quad \vec{F} \perp \vec{v}$$

$\Rightarrow$ Sirkelbevegelse med konstant

$$|\vec{v}| \text{ siden } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

Hvis komponent $v_{||}$ langs $\vec{B}$: Spiralbane

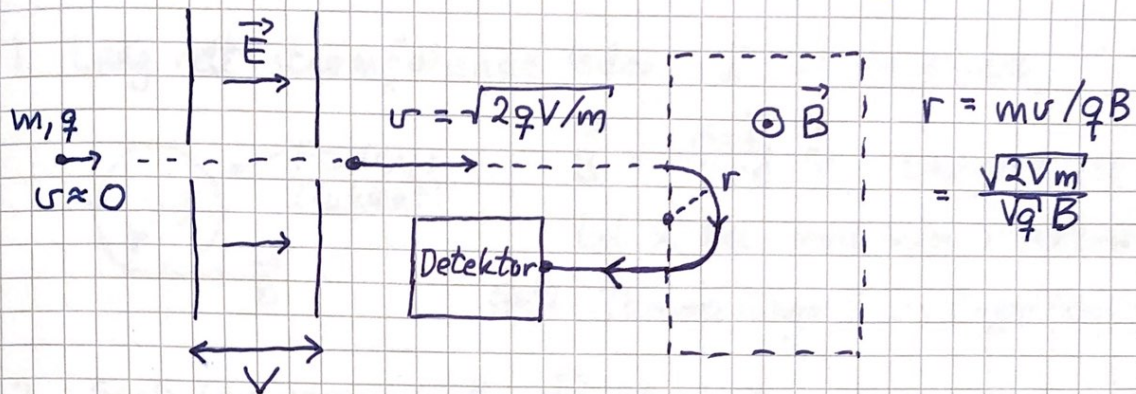
$$\text{NR: } qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB \Rightarrow \omega = v/r = qB/m$$

(syklotronfrekvensen)

Massespektrometer

[052 11.7; Øving 11]

(69)



$\Rightarrow$ Separasjon av isotoper

Biot-Savarts lov

[052 12.1]



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

= magnetfeltbidrag i avstand r
fra bit $d\vec{s}$ av ledersløyfe
som fører en strøm I

Totalt magnetfelt fra
strømsløyfa:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov
(1820)

Jf. Coulombs lov: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}$

Vakuumpermeabiliteten: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A}$

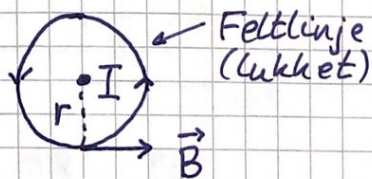
Lysfarten i vakuum:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Eksempler [os2 12.2, 12.4, 12.6]

(70)

1. Lang rett strømførende leder, I ut av planet

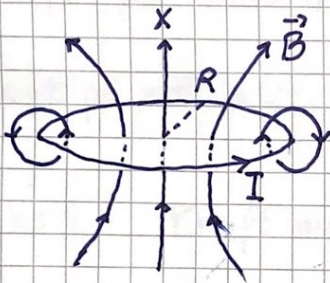


$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\varphi}; \text{ tangentielt}$$

til sirkel med leder i sentrum

HHA: Tommel langs I , 4 fingre langs $\vec{B}$

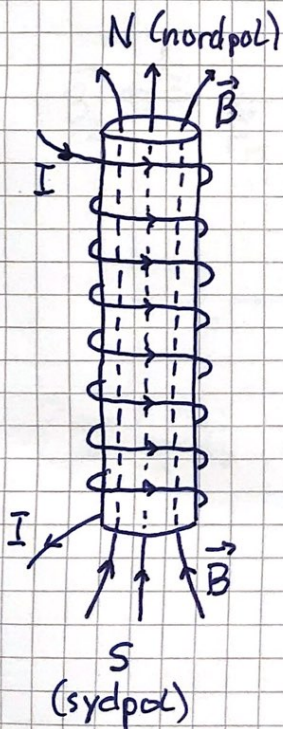
2. Sirkulær strømsløyfe, $\vec{B}$ på sløyfas akse (x-aksen)



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

HHR: 4 fingre langs I gir tommel langs $\vec{B}$ på sløyfas akse

3. Spole



Antar ideell spole: Lang med tettliggende viklinger. N viklinger på lengde $l \Rightarrow$ Viklingstetthet $n = N/l$

Inne i spolen: Uniformt felt

$$B = \mu_0 n I$$

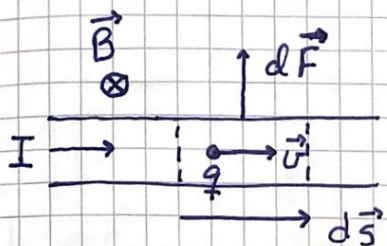
Retning: $\vec{B}$ fra S mot N.

Utenfor spolen: $B \approx 0$

HHR som for strømsløyfe

Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4]

(71)



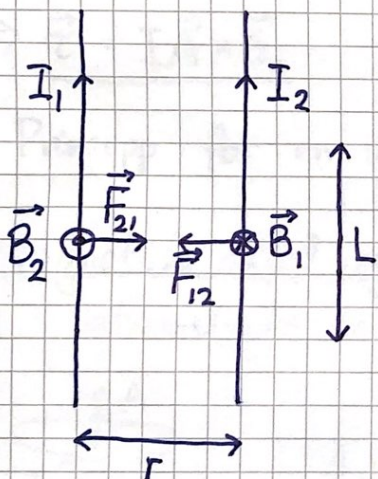
$d\vec{F} = N \cdot q\vec{v} \times \vec{B}$ = kraft på N frie ladninger q med midlere driftsfart $\vec{v}$ langs lederen; N frie ladninger på $d\vec{s}$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{ds/v} \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s} \Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Kraft på hele lederen: $\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int_{\text{leder}} d\vec{s} \times \vec{B}$

Kraft på rett leder, lengde L i uniformt $\vec{B}$ -felt: $F = BIL$

Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmen [OS2 11.4]



$$B_j = \mu_0 I_j / 2\pi r \quad (j=1,2)$$

= feltstyrke i avstand r fra leder j

Innbyrdes kraft på lengde L :

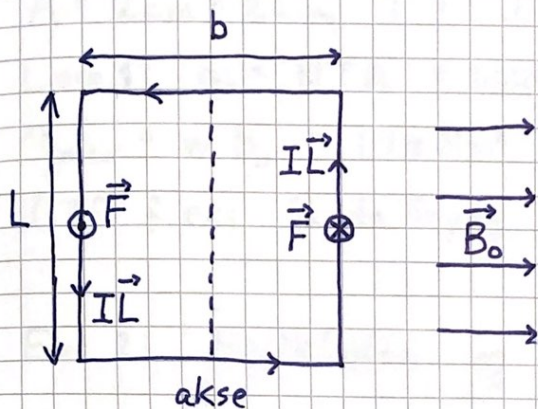
$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r}$$

Pr lengdeenhet: $f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$

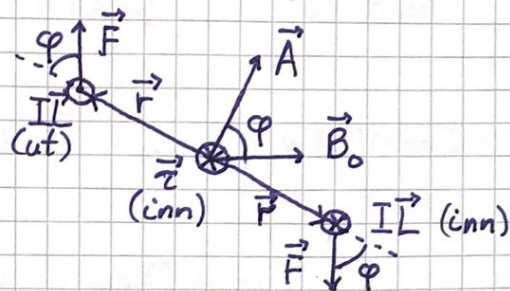
I_1 og I_2 i motsatt retning $\Rightarrow$ Frastøtende kraft

Eks 2: Dreiemoment på strømsløyfe i ytre felt $\vec{B}_0$

(72)



Sett langs akse:



$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}_0 ; F = ILB_0 \quad (\vec{B}_0 \perp \vec{L})$$

$$\vec{A} = A\hat{n} = bL\hat{n} ; \hat{n} = \text{enhetsvektor} \perp \text{strømsløyfa}$$

$$|\vec{\tau}| = |\sum \vec{r} \times \vec{F}| = 2|\vec{r} \times \vec{F}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB_0 \cdot \sin\varphi$$

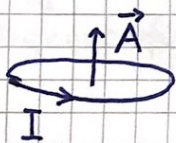
$$= IAB_0 \sin\varphi = |I\vec{A} \times \vec{B}_0|$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}_0} \quad (\text{Spole, } N \text{ viklinger: } \vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B}_0)$$

Prinsipp for en likestrømsmotor (DC-motor).

Magnetisk dipol og dipolmoment [OS2 11.5]

strømsløyfe = magnetisk dipol

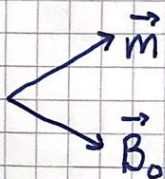


magn. dipolmoment $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm $\cdot$ omsluttet areal

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A} ; [\text{m}] = \text{A} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{Spole, } N \text{ viklinger: } \vec{m} = NI\vec{A}$$

Dipol i ytre felt $\vec{B}_0$:



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

If:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

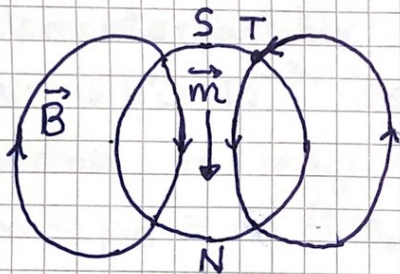
Eks 1: Beregn $\tau_{\max}$ på spole med $N=3200$, (73)
 $A = 2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, $I = 1.0\text{ A}$ i ytre felt $B_0 = 1.0\text{ T}$.

Løsning: $m = NIA = 3200 \cdot 1.0\text{ A} \cdot (0.02\text{ m})^2 = 1.28\text{ A m}^2$

$\tau_{\max} = m B_0 = 1.28\text{ A m}^2 \cdot 1.0\text{ T} = \underline{1.28\text{ Nm}}$

(Jf. f. eks Skoda Enyag IV 85x : $\tau_{\max} = 679\text{ Nm}$)

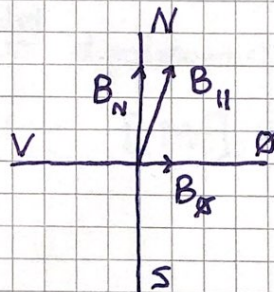
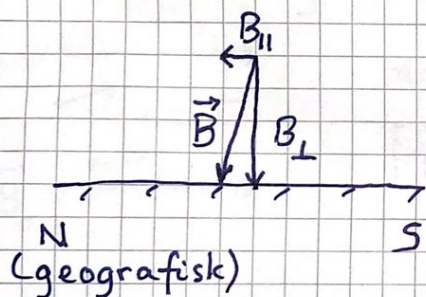
Eks 2: Jordkloden og $\vec{B}$ i Trondheim



$m \approx 8 \cdot 10^{22}\text{ A m}^2$

Med vår def. ligger
magnetisk N nær
geografisk S, og omvendt.

Trondheim (ngdc.noaa.gov):



$B \approx 52.2\text{ }\mu\text{T}$

$(dB/dt \approx 48\text{ nT/år})$

$B_{\perp} \approx 50.4\text{ }\mu\text{T}$

$B_{\parallel} \approx 13.6\text{ }\mu\text{T}$

$B_N \approx 13.5\text{ }\mu\text{T}$

$B_{\varnothing} \approx 1.2\text{ }\mu\text{T}$

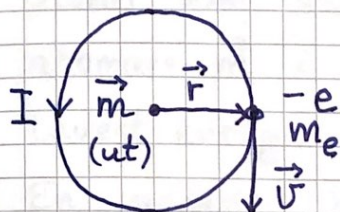
Magnetiske poler vandrer flere km pr år.

Magnetisme

[OS2 12.7]

(74)

Atomær dipol:



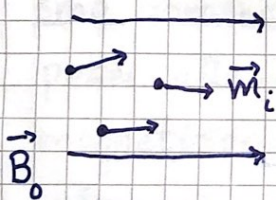
$$I = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v} = \frac{ev}{2\pi r} ; A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r \quad \left. \begin{array}{l} \\ L = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m_e v \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{e}{2m_e} L$$

Kvantemekanikk: Dreieimpuls L og spinn S for elementærpartikler er ca $\hbar = h/2\pi$, der $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js er Plancks konstant. Dvs at atomer er magn. dipoler med dipolmoment $m \approx \mu_B \equiv e\hbar/2m_e \approx 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$

Ytre felt $\vec{B}_0 \Rightarrow$ dreiemoment $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$

$\Rightarrow$ innretting av $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$:



Magnetisering $\stackrel{\text{def}}{=}$ dipolmoment pr volumenhett

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V ; [M] = \text{A/m}$$

Paramagneter: Svak innretting av atomære $\vec{m}$ i ytre felt $\vec{B}_0$. Eks: Al, Na, Mg

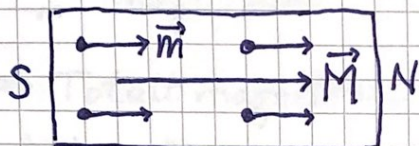
Diamagneter: Har $m=0$ uten ytre felt. Et ytre felt $\vec{B}_0$ induserer et meget lite dipolmoment $\vec{m}$ i motsatt retning av $\vec{B}_0$. Eks: Cu, Au, Hg

Ferromagnetisme

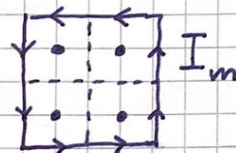
(75)

Fe, Ni, Co og Gd (og legeringer som $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$) har atomer som vekselvirker med naboatomene slik at atomære $\vec{m}$ i samme retning blir foretrukket, dvs gir lavest energi. Da er materialet ferromagnetisk.

En magnet har parallelle $\vec{m}$ i hele materialet:

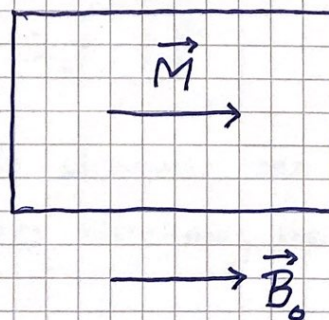
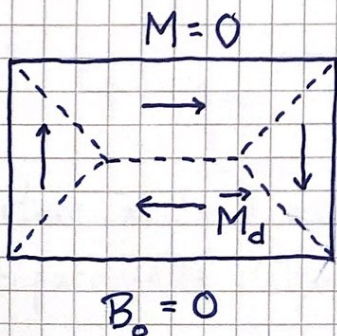


Sett forfra:



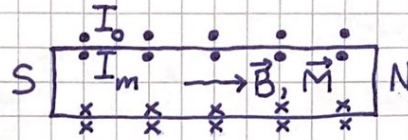
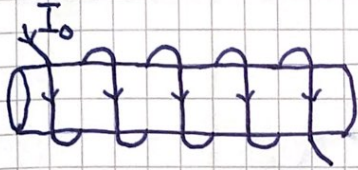
Får bundet magnetiseringsstrøm I_m i overflaten; indre strømmer kansellerer. (Jf. induert, bundet overflateladning på isolator i ytre felt $\vec{E}_0$.)

En umagnetisk ferromagnet (f.eks stål) har mange små domener med volum $(1-100 \mu\text{m})^3$. I et domene peker alle atomære $\vec{m}$ i samme retning og gir magnetisering $\vec{M}_d$. Ulike domener har $\vec{M}_d$ i ulike retninger $\Rightarrow$ Total magnetisering blir $\vec{M} = \sum_d \vec{M}_d \approx 0$. Materialet er umagnetisk, men blir magnetisk i et ytre felt $\vec{B}_0$ pga innretting av alle $\vec{M}_d$ langs $\vec{B}_0$:



Lineær respons:

Anta spole med jernkjerne.



$$I_0 = \text{spolestrøm pr vikling} \Rightarrow B_0 = \mu_0 n I_0$$

$$I_m = \text{magn. strøm} \text{ --- } \Rightarrow B_m = \mu_0 n I_m$$

$$\Rightarrow \text{Totalt magnetfelt inni spolen: } B = B_0 + B_m = \mu_0 n (I_0 + I_m)$$

Antar B_m prop. med B_0 , slik at B blir prop. med B_0 .

$$\Rightarrow B = \mu_r B_0 ; \mu_r = \text{materialets relative permeabilitet}$$

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 n I_0 = \mu n I_0 ; \mu = \mu_r \mu_0 = \text{materialets permeabilitet}$$

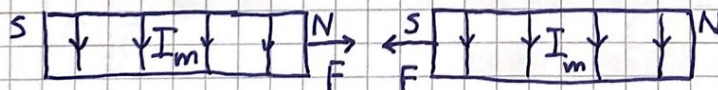
μ_r	vakuum	Al	Cu	Fe 99.8%	Rustfritt stål
	1	1.000022	0.999994	5000	750-1800

Eks 1: $N = 400$, $l = 5 \text{ cm}$, $I_0 = 0.5 \text{ A}$, $\mu_r = 800$. Finn B og I_m .

$$\text{Løsning: } B = 800 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (400/0.05) \cdot 0.5 \text{ T} = \underline{4.0 \text{ T}}$$

$$I_m = (\mu_r - 1) I_0 \approx \mu_r I_0 = \underline{400 \text{ A pr vikling}}$$

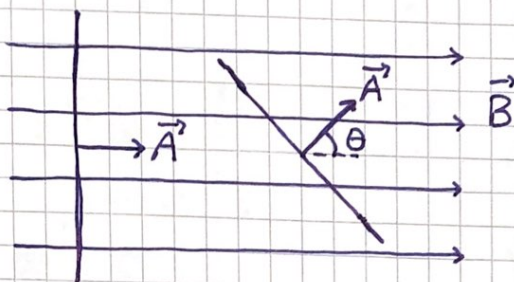
Eks 2: Nettokraft mellom to magneter



Kortere avstand mellom parallelle strømmer enn mellom antiparallelle strømmer $\Rightarrow$ Netto tiltrekning mellom N og S.

Magnetisk fluks

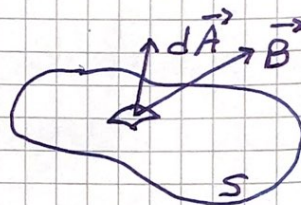
[052 13.1]



Flest feltlinjer
gjennom en flate
når den står
normalt på $\vec{B}$

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta =$ magnetisk fluks gjennom flate med areal A og vinkel θ mellom $\vec{B}$ og $\vec{A}$.

Generelt: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

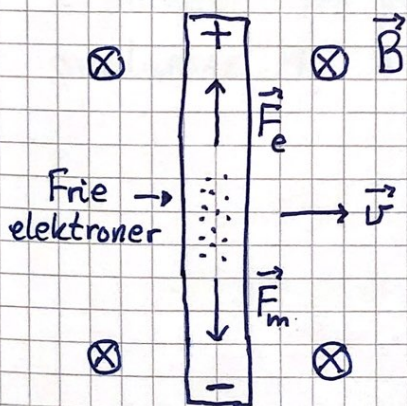


Enhet: $[\Phi] = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}$ (weber)

B prop. med antall feltlinjer pr flateenhet
 $\Rightarrow \Phi$ prop. med antall feltlinjer gjennom flaten

Faradays induksjonslov [052 13.1]

Leder, lengde l , trekkes med fart $\vec{v}$ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$:



$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B} \text{ på frie elektroner}$$

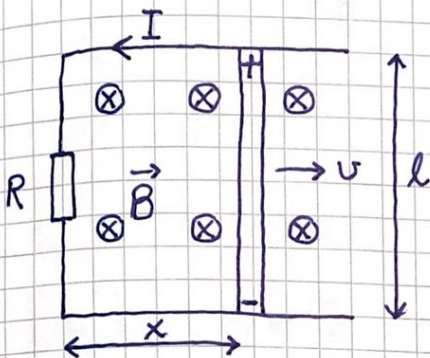
$\Rightarrow$ Netto negativ ladn. nederst,
netto positiv ladn. øverst

$\Rightarrow$ Et induert elektrisk felt $\vec{E}$
i lederen

$\Rightarrow$ En induert elektromotorisk
spenning $\Delta V = E \cdot l$
over lederen

Likerekt når $F_e = F_m \Rightarrow e \cdot E = e v B \Rightarrow E = v B$ (78)
 $\Rightarrow \Delta V = v B l$

Kan drive strøm i en lukket krets:



$$\begin{aligned} \Delta V &= v B l = \frac{dx}{dt} B l \\ &= \frac{d}{dt} (x B l) = \frac{d}{dt} (B \cdot A) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Faradays induksjonslov: $\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$

Indusert spenning i lukket sløyfe tilsvarer endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet.

Lenz' lov [OS2 13.2]

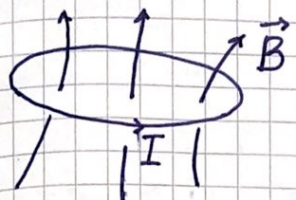
Indusert I skaper felt $\vec{B}_I$ og tilhørende omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ som motvirker den påtrungne fluksendringen $\Delta\Phi$, som induerte ΔV og I i utgangspunktet.

Eks: I figuren ovenfor påtringes økt fluks inn i planet. Da går I mot klokka slik at tilhørende omsluttet Φ_I er positiv ut av planet.

Induktans og induksjon [052 14.1, 14.2]

(79)

Selvinduktans:



Pga Biot-Savarts lov er B prop. med I
 $\Rightarrow$ Omsluttet fluks prop. med I :

$$\Phi = L \cdot I$$

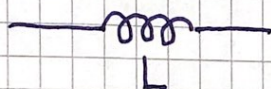
L = systemets (selv-)induktans

$$[L] = \text{Wb/A} = \text{H (henry)}$$

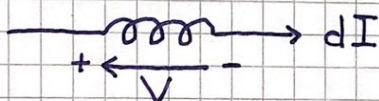
Selvinduksjon: En endring dI gir $d\Phi = L \cdot dI$
og dermed en indusert (mot-)spenning

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Induktans som kretselement (typisk en spole):



Retning på V slik at strømindringen motvirkes:

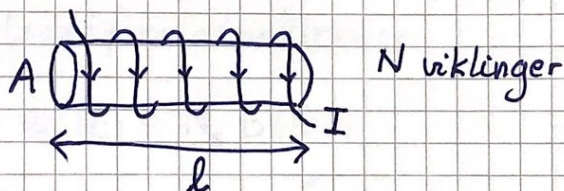


Eks: Ideell spole

$$B = \mu_0 n I ; n = N/l$$

$$\Rightarrow \Phi = NBA = (\mu_0 N^2 A / l) I$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \mu_0 N^2 A / l$$



Med ferromagnetisk kjerne: $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$ ($\mu_r \gg 1$)

$$\Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l \quad (\Rightarrow [\mu] = \frac{\text{H}}{\text{m}})$$

3.f. s. 51

Gjensidig induktans:

(80)



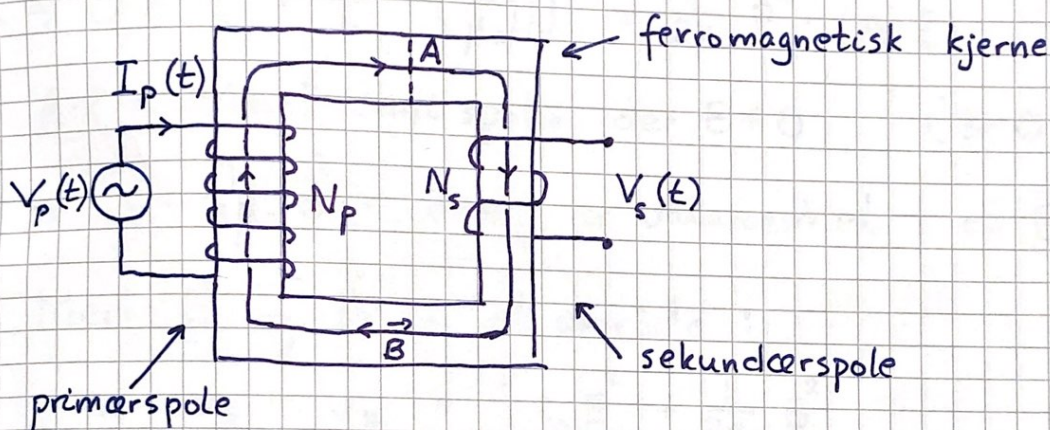
$I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \Phi_2$ omsluttet av sløyfe 2
 B_1 prop med $I_1 \Rightarrow \Phi_2$ prop med I_1

$\Rightarrow \Phi_2 = M_{21} I_1$ og omvendt $\Phi_1 = M_{12} I_2$

Fra Biot-Savarts lov følger $M_{21} = M_{12} = M$
 som er sløyfenes gjensidige induktans. $[M] = H$

Gjensidig induksjon: $dI_1 \Rightarrow d\Phi_2 = M dI_1 \Rightarrow V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$
 og omvendt, $V_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$.

Eks: Transformator



$I_p(t)$ skaper $\vec{B}(t)$ i transformatorkjernen

$\Phi_p(t) = N_p B(t) A$; $\Phi_s(t) = N_s B(t) A$

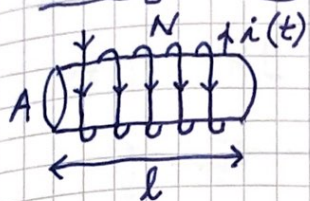
$V_p(t) = \dot{\Phi}_p(t) = N_p A \dot{B}(t)$; $V_s(t) = \dot{\Phi}_s(t) = N_s A \dot{B}(t)$

$\Rightarrow \frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow$ Amplituden til $V_p(t)$ kan transformeres
 ned ($N_s < N_p$) eller opp ($N_s > N_p$)

Energi i $\vec{B}$ -felt

[052 14.3]

(81)



Økning av strømmen fra $i=0$ til $i=I$ krever arbeid, for å overvinne induisert motspenning $v = L \cdot di/dt$

Tilført energi når $i \rightarrow i + di$:

$$dU = P \cdot dt = v \cdot i \cdot dt = L \cdot (di/dt) i dt = L \cdot i \cdot di$$

Total energi tilført, og dermed lagret i spolen:

$$U = \int dU = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Antar ideell spole: $L = \mu_0 N^2 A / l$ og $I = \frac{B}{\mu_0 N / l}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \left(\frac{B l}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \cdot (A \cdot l)$$

$A \cdot l$ = volumet inni spolen, der $B \neq 0$ ($B=0$ utenfor)

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \text{energi pr volumenhett i et } \vec{B}\text{-felt}$$

Med $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i et område:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

Eks: Elektromagnetisk bølge (s. 57)

$$\vec{v} = c \hat{x}; \quad \vec{E} = E_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t); \quad \vec{B} = B_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t)$$

Kan vises (fra Maxwells ligninger) at $B_0 = E_0 / c$

Dermed:

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{1}{2}; \quad \langle u_B \rangle = \langle u_E \rangle \quad \text{sidan} \quad \frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$$

$\uparrow$
 $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$

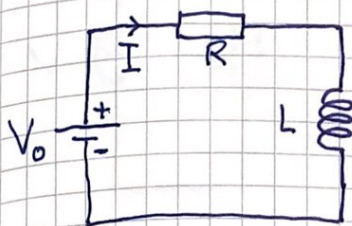
$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B_0^2$$

Avsluttende eksempler

[052 14, 15]

(82)

Eks 1: RL-krets

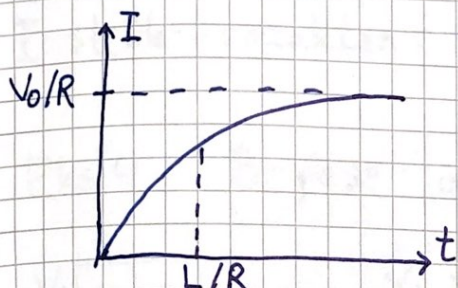


Finn $I(t)$ når V_0 kobles til ved $t=0$.

$$K2: V_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

dvs samme ligning for $I(t)$ som vi hadde for $Q(t)$ i RC-kretsen

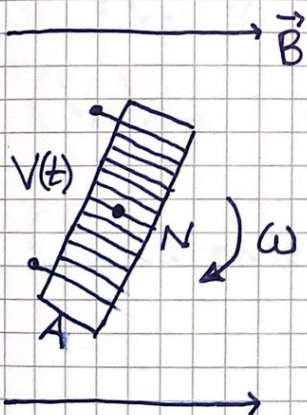
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga induert motspenning i spolen tar det litt tid å øke strømmen, fra $I=0$ til $I_{\max} = V_0/R$.

Eks 2: Vekselspanning

Vann og vind kan drive en turbin og rotere en spole i et magnetfelt:



Omsluttet fluks:

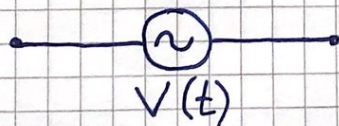
$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

Indusert vekselspanning
(AC: alternating current):

$$V(t) = V_0 \sin \omega t$$

med amplitude $V_0 = NBA\omega$

Kretssymbol:

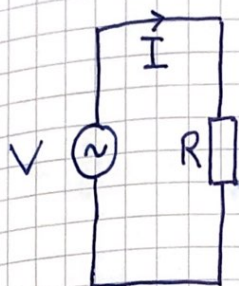


Frekvens: $f = \omega/2\pi$

Europa: $f = 50 \text{ Hz}$

Eks 3: Effektivverdier

(83)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0 / R$$

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

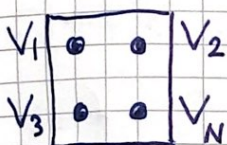
$$\Rightarrow \text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

Uttrykt ved effektivverdier (rms-verdier):

$$\langle P \rangle = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}} ; V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} ; I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{I stikk-kontakten: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: 3-fase og 400 V



$$V_1 = V_0 \sin \omega t$$

$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

$$V_N = 0$$

(nøytral-
leder)

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

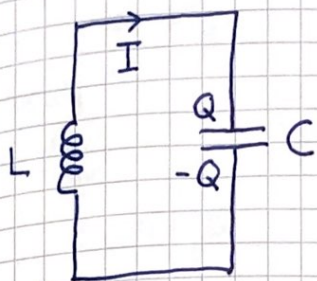
$$\Rightarrow V_{21} = V_2 - V_1 = 2 V_0 \cos(\omega t + \pi/3) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow (V_{21})_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_0 = 400 \text{ V} \text{ dersom } V_0 = 325 \text{ V}$$

(Tilsvarende for V_{32} og V_{31})

Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

(84)



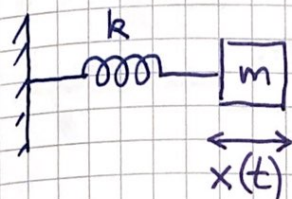
$$K2: -L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0 ; I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 ; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Med $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t ; I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Med $x = x_0$ og $v = 0$ ved $t = 0$:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t ; v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

Analoge størrelser:

$$Q \leftrightarrow x ; I \leftrightarrow \dot{x} ; L \leftrightarrow m ; C \leftrightarrow \frac{1}{k}$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \text{---||--- } \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$$

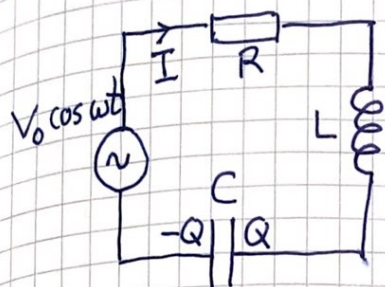
Konservative systemer, uten tap (dissipasjon) av energi:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{L}{2} \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$\left(\text{siden } L \omega_0^2 = C^{-1} \right) \quad \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant (uavh. av t)}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

(85)



$$K2: V_0 \cos \omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: F_0 \cos \omega t - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Analogier:

$$b \leftrightarrow R, \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

Må ha $Q(t)$ på samme form som $x(t)$:

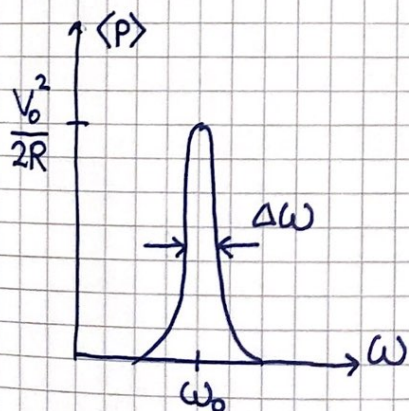
$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi); \quad Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}$$

med $\gamma = R/2L$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega \cdot Q_0(\omega)$$

Tilført effekt (= tapt effekt i R):

$$\langle P \rangle(\omega) = \langle V(t)I(t) \rangle$$



På resonans ($\omega = \omega_0$): $\langle P \rangle = \frac{V_0^2}{2R}$

og $I_0 = V_0/R$, for da er jo

$$L\ddot{Q} + Q/C = 0, \text{ dvs } RI = V_0 \cos \omega t$$

Halverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

Qoscillatorens godhetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$