

MEKANIKK

①

Størrelser og enheter [OS1 1]

Eks: Verdensrekord, maraton 2:00:35

$t = 7235 \text{ s}$ ← SI-enhet (s = sekund)
symbol ↑ tallverdi

Notasjon: $[t] = \text{s}$ "SI-enhet for tid er sekund"

Grunnenheter i SI-systemet:

meter	m	lengde	} mekanikk
kilogram	kg	masse	
sekund	s	tid	
ampere	A	strømstyrke	elmag
kelvin	K	temperatur	} termodynamikk
mol	mol	stoffmengde	
candela	cd	lysstyrke	

Definert med utgangspunkt i eksakt definerte verdier for diverse naturkonstanter (siden 20.05.2019):

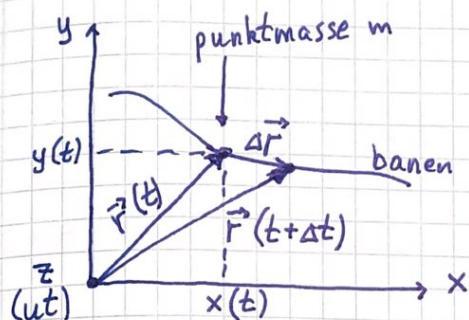
lysfarten i vakuum	$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$
elementærladningen	$e = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Plancks konstant	$h = 6.626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Boltzmanns konstant	$k_B = 1.380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Avogadros konstant	$N_A = 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Sammensatte enheter:

hastighet (fart)	$[v] = \text{m/s}$
akselerasjon	$[a] = \text{m/s}^2$

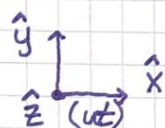
Abledte enheter:

kraft	$[F] = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{N (newton)}$
arbeid, energi	$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J (joule)}$

Posisjon ved tid t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Enhetsvektorer:



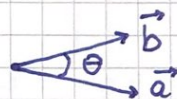
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1 ; [\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\text{skalarprodukt: } \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

$$\text{kryssprodukt: } \hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z} \quad \text{osv med høyrehåndregel}$$

$$\hat{x} \times \hat{x} = 0$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab \cos \theta ; |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \theta$$



$$\text{Forflytning i løpet av } \Delta t: \Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ Forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} ; \vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \quad (\text{tangent til banen})$$

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ Hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} ; \vec{a} \parallel d\vec{v}$$

Komponenter (kartesiske):

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad \text{med } v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad \text{osv}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \quad \text{med } a_x = d^2x/dt^2 = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

Omvendt er $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$ integraler av hhv $\vec{v}(t)$ og $\vec{a}(t)$:

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

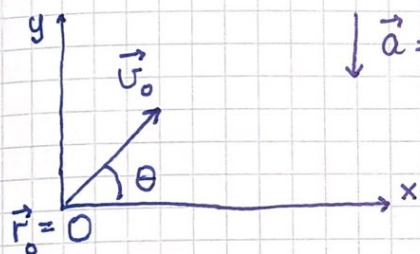
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}(t) dt \quad (3)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant, og med $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet



$$\downarrow \vec{a} = -g\hat{y} \quad ; \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Bestem $\vec{r}(t)$ og banen $y(x)$

$$\text{Løsn: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - gt\hat{y} \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0t - \frac{1}{2}gt^2\hat{y}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = v_0t \cos\theta \quad ; \quad y(t) = v_0t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$t = x/(v_0 \cos\theta) \Rightarrow y(x) = x \tan\theta - x^2g/(2v_0^2 \cos^2\theta) \quad ; \quad \text{parabel}$$

TFY4104 05.12.24 nr 3:

$v_0 = 25 \text{ m/s}$, $\theta = 60^\circ$. Hva er t når $y = y_{\max}$?

Løsn: $v_y = 0$ når $y = y_{\max}$

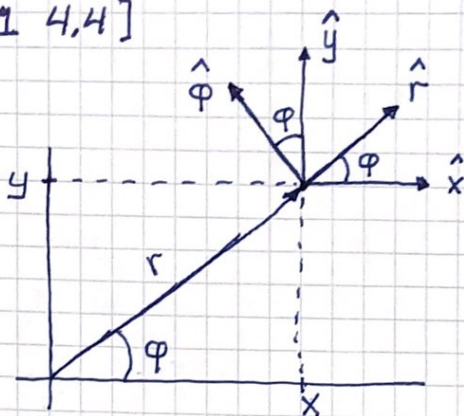
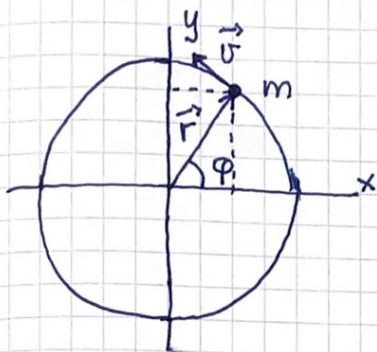
$$\Rightarrow v_0 \sin\theta - gt = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sin 60^\circ}{9.81 \text{ m/s}^2} = \frac{25 \cdot \sqrt{3}/2}{9.81} \text{ s} = \underline{\underline{2.2 \text{ s}}}$$

Sirkelberegelse

[059 4,4]

(4)



Polarkoordinater :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$; $\varphi > 0$ mot klokka

Fra figuren ser vi :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi = d\hat{r}/d\varphi$$

vinkel $\stackrel{\text{def}}{=} \text{buelengde} / \text{radius}$

$$d\varphi = ds/r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt rad})$$

vinkelfart $\stackrel{\text{def}}{=} \text{omløpt vinkel pr tidsenhet}$

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = 1/s \quad (\text{evt rad/s})$$

vinkelakselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=} \text{endring i vinkelfart pr tidsenhet}$

$$\alpha = d\omega/dt = \dot{\omega} = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2 \quad (\text{evt rad/s}^2)$$

Fra fig. ser vi : $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$; $\vec{v} \perp \vec{r}$

Med små dt og $d\varphi$: $|d\vec{r}| = dr = ds = r d\varphi$

$$\Rightarrow v = \frac{dr}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad ; \quad \vec{v} = r\omega \hat{\varphi}$$

[Senere, med $\vec{\omega}$ langs rotasjonsaksen : $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$]

Akselerasjon ved sirkelbevegelse :

⑤

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt = -\hat{x} r \dot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad [\text{kjerneregul}]$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = d\vec{v}/dt &= \left. \begin{aligned} -\hat{x} r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \hat{y} r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -\hat{x} r \ddot{\varphi} \sin \varphi + \hat{y} r \ddot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} [\text{kjerneregul}] \\ \text{og produktregel} \end{array} \\ &= -\hat{r} r \dot{\varphi}^2 + \hat{\varphi} r \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

Sentripetalaks. : $\vec{a}_{\perp} = -\hat{r} r \omega^2 = -\hat{r} v^2/r$; dvs retning
inn mot sirkelens sentrum

Baneaks. : $\vec{a}_{\parallel} = \hat{\varphi} r \alpha = \hat{\varphi} r \dot{\omega} = \hat{\varphi} \dot{v}$; dvs retning
tangentielt med sirkelbanen

Uniform sirkelbevegelse dersom ω og v er konstante ;
da er $a_{\parallel} = 0$ og $a = a_{\perp} = v^2/r$.

Et par sentrale størrelser til :

periode $\stackrel{\text{def}}{=} \text{tid pr omløp}$

$$T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega \quad ; \quad [T] = s$$

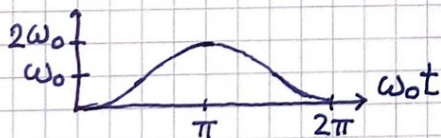
frekvens $\stackrel{\text{def}}{=} \text{antall hele omløp pr tidsenhet}$

$$f = 1/T = \omega/2\pi \quad ; \quad [f] = 1/s = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$

TFY4104 05.12.24 nr 4 og 5:

Karusell, $\omega(t) = \omega_0 [1 - \cos(\omega_0 t)]$; $\omega_0 = 0.10 \text{ rad/s}$

4) Hva er maksimal vinkel fart ?



$$\omega_{\max} = 2\omega_0 = \underline{\underline{0.20 \text{ rad/s}}}$$

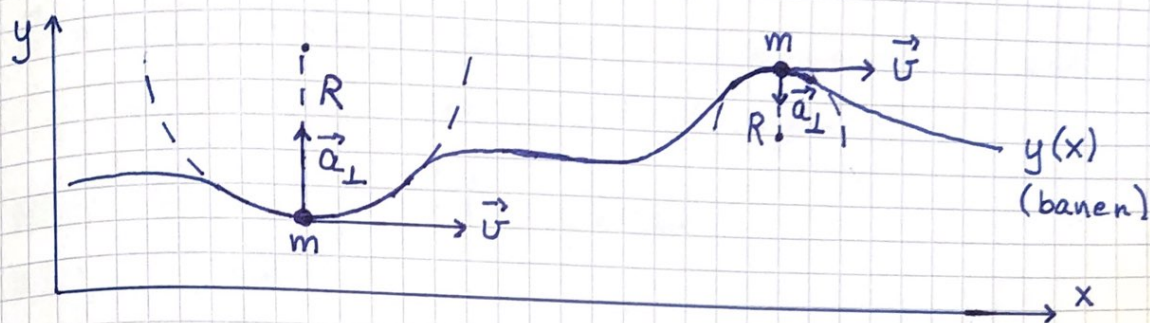
for $\omega_0 t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

5) Hva er maksimal vinkelakselerasjon ?

$$\dot{\omega} = \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{\omega}_{\max} = \omega_0^2 = \underline{\underline{0.010 \text{ rad/s}^2}}$$

Beregelse langs krum bane (LAB):

⑥



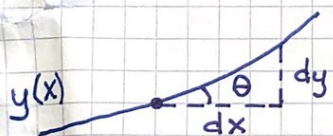
Banens krumningsradius (utledet i notater s.10-11 i 2019)

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \quad (y' = \frac{dy}{dx} ; y'' = \frac{d^2y}{dx^2})$$

varierer langs banen og er radien i en sirkel som best tangerer banen $y(x)$.

- $a_{\perp} = v^2/R$ med retning inn mot sirkelens sentrum
- $y' = 0$ i topp- og bunnpunkter $\Rightarrow R = |y''|^{-1}$
- $y'' = 0$ i vendepunkter $\Rightarrow R \rightarrow \infty$ og $a_{\perp} = 0$

Banens helningsvinkel:



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

TFY4104 05.12.24 nr 7:

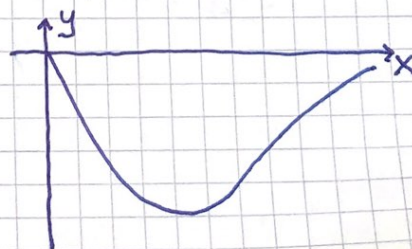
$$y(x) = -ax \exp(-x/b) ; a = 1.50, b = 40.0 \text{ cm}$$

Hva er helningsvinkelen i $x=0$?

$$\text{Løsning: } dy/dx = -a \exp(-x/b) + (ax/b) \exp(-x/b)$$

$$\Rightarrow y'(0) = -a = -1.50$$

$$\Rightarrow \theta(0) = \arctan(1.50) = \underline{\underline{56^\circ}}$$



Newtons Lover

[051 5, 6]

(7)

$m, \vec{v}, \vec{a}$: legemets masse, fart, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto kraft på legemet = vektorsummen av alle ytre krefter som virker på legemet

N1 : $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2 : $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 : Krefter er vekselvirkninger mellom legemer.

Hvis legeme 1 virker med kraft $\vec{F}_{12}$ på legeme 2, virker legeme 2 med kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ på legeme 1.

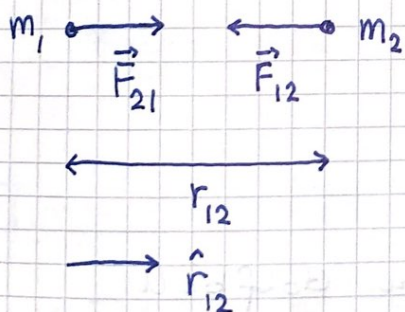
$$[F] = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N} \text{ (newton)}$$

Impuls (= bevegelsesmengde) : $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{F} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt = d\vec{p}/dt$$

Fundamentale naturkrefter [051 13.1 ; 052 5.3]

• Gravitasjon (tyngdekraft): Svak tiltrekning mellom masser



Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

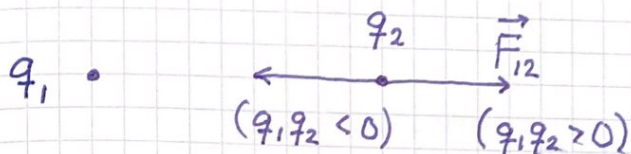
Den universelle gravitasjonskonstanten:

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$

- Coulombkraft (elektrostatisk kraft):

(8)

Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} ; [q] = C \text{ (coulomb)}$$

Vakuumpermittiviteten: $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

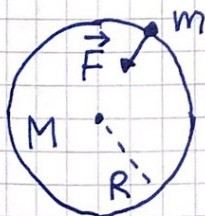
- Kjernekrefter: Svake og sterke krefter med kort rekkevidde. Årsak til radioaktivitet, og stabilitet av atomkjerner.

Viktigst i mekanikken:

- Tyngdekraften fra jorda, og mellom himmellegemer
- Kontaktkrefter: Normalkraft og friksjonskraft. Begge disse er coulombkrefter.

Tyngde

[OS1 13.2; 5.4]



$$F = GmM/R^2 = \text{tyngden av } m$$

$$\text{Jorda: } M \approx 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg} ; R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

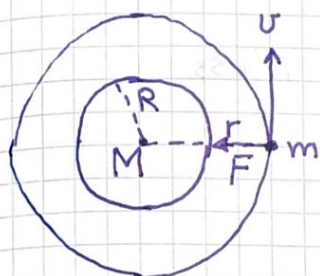
$$\Rightarrow F = mg \text{ med } g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2,$$

tyngdens akselerasjon ved jordas overflate

Fritt fall når mg er eneste kraft på m ; N2 gir da: $a=g$

Satellittbaner: Sirkel med jordas sentrum i sentrum, radius r .

⑨



$$F = GMm/r^2, \quad a = v^2/r, \quad F = ma$$

$$\Rightarrow GMm/r^2 = mv^2/r$$

$$\Rightarrow \underline{v^2 r = GM} \quad (r > R)$$

Geostasjonære satellitter går i en bane i ekvatorialplanet med omløpstid $T \approx 24$ timer ($T = 23\text{ h } 56\text{ min } 4.1\text{ sek}$)

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} \quad (= 0.2618 \frac{\text{rad}}{\text{h}}) \text{ er da fastlagt}$$

$$v^2 r = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r = GM \Rightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 4.22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

og $v = \sqrt{GM/r} \approx 3 \text{ km/s}$. Siden $R \approx 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, er satellitten i høyde $h = r - R \approx 36\,000 \text{ km}$ over et fast sted på ekvator.
 (35786 km)

Eks: Hva er minste mulige tidsforsinkelse ved kommunikasjon via en geostasjonær satellitt?

Løsn: Signalets fart er $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (EM bølger), og strekningen er minst $2 \cdot h \approx 7.2 \cdot 10^7 \text{ m}$.

$$\Rightarrow \Delta t_{\min} = \frac{2h}{c} \approx \underline{\underline{0.24 \text{ s}}}$$

Kontaktkrefter

[051 5.6, 6.2, 6.4, 14.3]

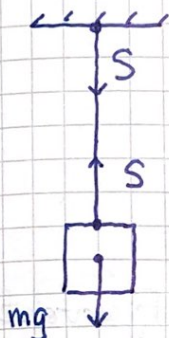
(10)

Normalkraft: N = normalkomponenten av kontaktkraften mellom to legemer



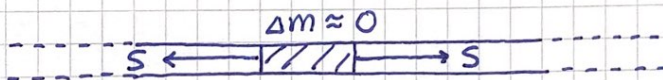
Med klossen i ro gir N1 at $N = mg$

Snorkraft: S = kraften fra snora på det den er festet til

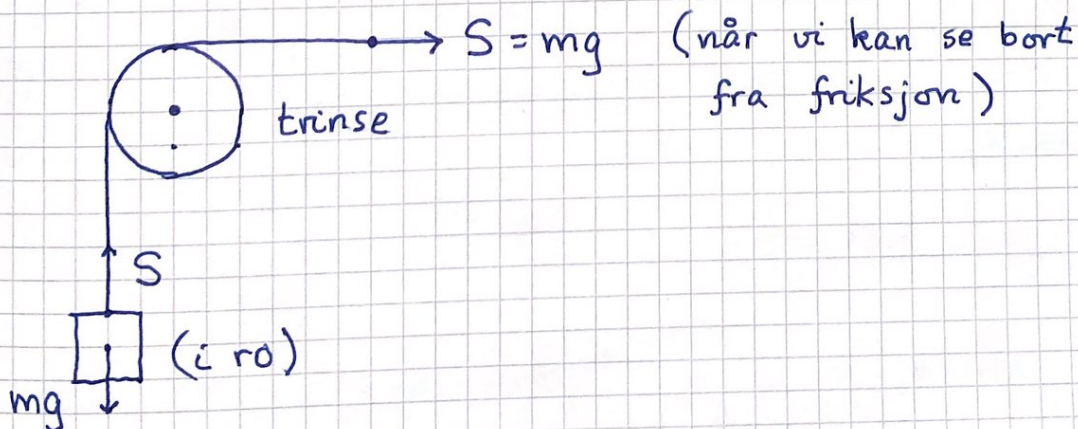


Med klossen i ro: $S = mg$ (N1)

I lette og utstrekte snorer er snordraget S like stort i hele snora:

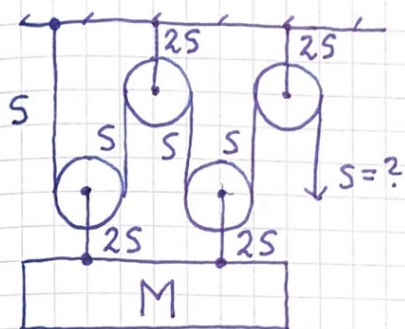


Trinser endrer retningen på $\vec{S}$:



Talje:

(11)



$$N1 \text{ for kassa: } 4S = Mg$$

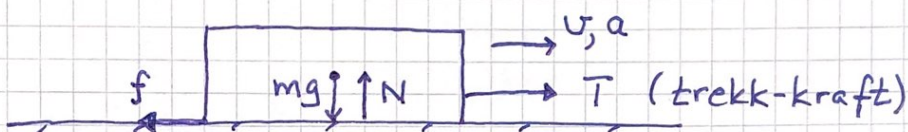
$\Rightarrow$ Kan løfte kassa med
kraften $S = \frac{1}{4} Mg$

Friskjon

[OS1 6.2]

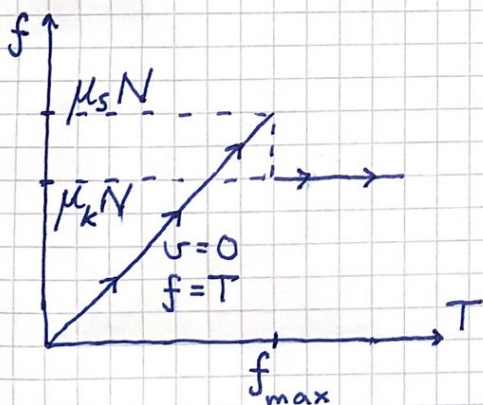
f = kontaktkraftens komponent tangentielt med
kontaktflaten mellom to legemer; retningen
er mot legemenes relative bevegelse

Empirisk:



$$N1 \perp \text{bordet} \Rightarrow N = mg$$

$$N2 \parallel \text{---} \Rightarrow T - f = ma \Rightarrow f = T - ma$$



Statisk friskjon: $f \leq f_{\max} = \mu_s N$

μ_s = statisk friskjonskoeffisient

Kinetisk friskjon: $f = \mu_k N$

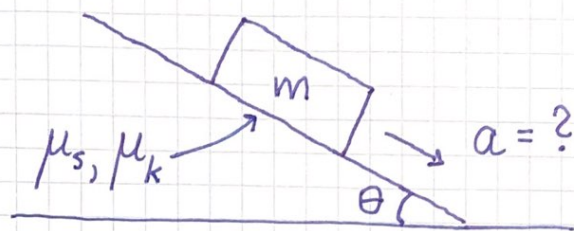
μ_k = kinetisk friskjonskoeffisient

$$[\mu] = 1 \quad (\text{dim.løs})$$

Verdien av μ_s og μ_k avhenger av overflaten til
begge legemene som er i kontakt. Som regel er $\mu_s > \mu_k$;
ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$.

Eks, inkl. typisk "strategi": Kloss på skråplan

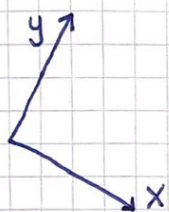
(12)



- Finn alle ytre krefter og tegn fritt-legeme-diagram



- Velg koordinatsystem og dekomponer kreftene



$$N_x = 0, \quad N_y = N$$

$$f_x = f, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1 og/eller N2 og løs ligningene

$$N1 \perp \text{skråplanet} \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

$$N2 \parallel \text{---} \Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$$

Statisk ($a=0$): $f = mg \sin \theta$; må ha $f \leq f_{\max}$
med $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$; bare mulig hvis $\tan \theta \leq \mu_s$

$$\text{Kinetisk: } f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta \Rightarrow a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

Måling av μ_s : Vi øker θ inntil klossen begynner
å gli ved vinkelen $\theta_{\max}$; da er $\mu_s = \tan \theta_{\max}$