Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7]

anta omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ

Luft : $\rho = 1.2\ kg/m^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5}\ kg/(m \cdot s)$

Vann : $\rho = 1000$ –"– , $\mu = 10^{-3}$ –"–

Liten v $\Rightarrow$ Pen og lagdelt (laminær) strømning av fluidet rundt legemet og $\vec{f} = -k\vec{v}$.

Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor v $\Rightarrow$ Uordnet (turbulent) strømning av fluidet og $\vec{f} = -\frac{1}{2}\rho A C_d v^2 \hat{v}$, der

C_d = drag-koeffisienten, i hovedsak bestemt av legemets form

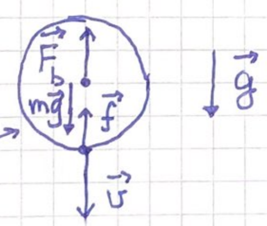
A = legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$

Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Oppdrift :

(buoyancy)

volum V



$\vec{F}_b = -\rho V \vec{g}$ = tyngden av den fortrengte fluidmengden (Arkimedes' prinsipp)

Terminalfart : Maksimal fart ved "fritt" fall i tyngdefeltet; tilsvarer $\Sigma \vec{F} = 0$, dvs

$$\vec{F}_b + \vec{f} = m\vec{g}$$

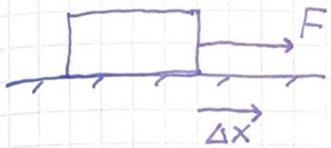
Ved fall i luft er ofte $F_b \ll f$, slik at $f(v_t) = mg$ gir terminalfarten v_t. Eks: Kule, stor fart, radius r.

N1 $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho A C_d v_t^2 = mg \Rightarrow v_t \simeq \{4mg/(\rho\pi r^2)\}^{1/2}$

Arbeid og energi [OS1 7, 8]

Arbeid [OS1 7.1]

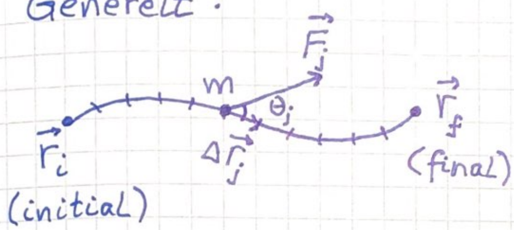
arbeid $\overset{\text{def}}{=}$ kraft · forflytning



$\Delta W = F \cdot \Delta x$ = arbeid utført av F på klossen

$[W] = N \cdot m = J$ (joule)

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j = F_j \, \Delta r_j \cos\theta_j$$

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m når den flytter seg fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

effekt $\overset{\text{def}}{=}$ utført arbeid (overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad ; \quad [P] = \frac{J}{s} = W \text{ (watt)}$$

TFY4125 21.05.24 nr 1:

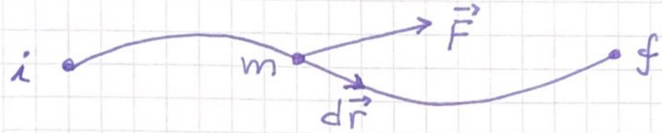
Hvis 1 kWh koster 593 øre, hvor mange MJ får du for 100 kr?

Løsn: $1\,\text{kWh} = 1000\,\frac{J}{s} \cdot 3600\,s = 3.6\,\text{MJ}$

$\Rightarrow$ prisen er $5.93\,\text{kr} / 3.6\,\text{MJ} = 1.647\,\text{kr/MJ}$

$\Rightarrow$ for 100 kr får du $100\,\text{kr} / (1.647\,\text{kr/MJ}) = \underline{\underline{60.7\,\text{MJ}}}$

Kinetisk energi [OS1 7.2]



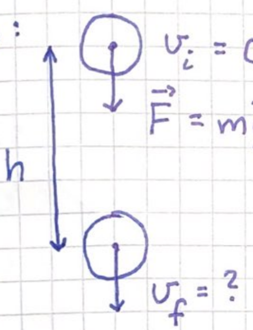
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{m}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{m}{2}dv^2$$

$$\Rightarrow W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}m\int_i^f dv^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

Dvs: $\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$ Work-energy theorem

Eks:



$$W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

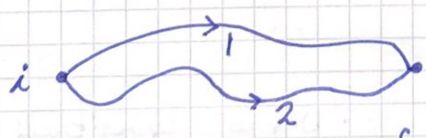
$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [OS1 8.1–8.4]

Dersom $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, er $\vec{F}$ konservativ.

integral rundt lukket kurve

Da er arbeidet utført av $\vec{F}$ uavhengig av veien:



$$W_1 - W_2 = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 - \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2$$

$$= \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 + \left\{\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2$$

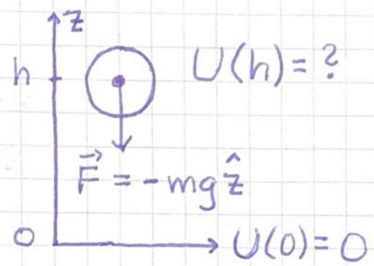
Forskjell i potensiell energi U, med konservativ $\vec{F}$:

$$\Delta U = U_f - U_i \overset{def}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vi velger $U = 0$ der vi ønsker. Bare <u>forskjeller</u> i potensiell energi har fysisk betydning. Anta $U(\vec{r}_0) = 0$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks:



$$U(h) = - \int_0^h F\, dz$$
$$= - \int_0^h (-mg)\, dz = \underline{\underline{mgh}}$$

Beregning av $\vec{F}$ fra U:

1D : $dU = -F(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad F(x) = -dU/dx$

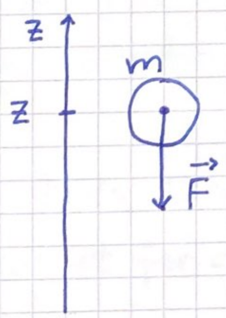
3D : $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U$

Gradienten til en skalar funksjon $f(x,y,z)$:

$\nabla f = \left\{ \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \right\} f$ = vektor i den retningen som f øker raskest; $|\nabla f|$ = endring i f pr lengdeenhet

$\Rightarrow$ $\vec{F} = -\nabla U$ peker i den retningen som U avtar raskest

Eks:

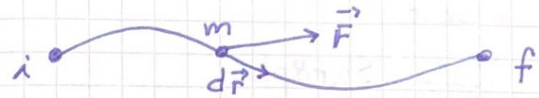


$$U(z) = U(0) + mgz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{F} = -mg\hat{z}}$$

Energibevarelse [OS1 8.3]

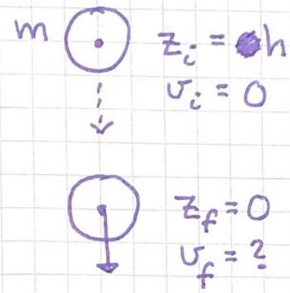


(konservativ $\vec{F}$)

$$\left.\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

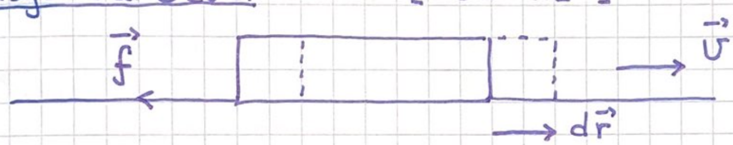
Eks:



$K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$

Friksjonsarbeid [OS1 7.1]



Kinetisk friksjon: $dW_f = \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$ da $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning. Dermed er $\oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$, og $\vec{f}$ er ikke konservativ. Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi osv.

Statisk friksjon: $d\vec{r} = 0 \Rightarrow dW_f = 0 \Rightarrow$ mekanisk energi er bevart

---

Eks: Hvis klossen får startfart 1.0 m/s og glir 40 cm på bordet før den stopper, hva er da μ_k?

Løsn: $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$; $W_f = f \cdot s = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$

$\Rightarrow \mu_k = v_0^2/(2gs) = 1.0^2/(2\cdot 9.81 \cdot 0.40) = \underline{\underline{0.13}}$

LAB: Rullende kule på krum bane

Ren rulling (kula glir ikke) $\Rightarrow$ statisk friksjon $\vec{f}$

$\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart

Pot. energi : $U = Mgy$

Translasjonsenergi : $K_{trans} = \frac{1}{2} MV^2$

Rotasjonsenergi : $K_{rot} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

Treghetsmoment for kompakt kule : $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Rullebetingelse : $\omega = V/R$

$$\Rightarrow K_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} MR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{5} MV^2$$

Total kinetisk energi :

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{7}{10} MV^2$$

Anta $V = 0$ i starthøyden y_0. Energibevarelse gir :

$$\frac{7}{10} MV(y)^2 = U(y_0) - U(y) = Mg \cdot (y - y_0)$$

$$\Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot (y - y_0)}$$