

Svingninger

[OS1 15]

(35)

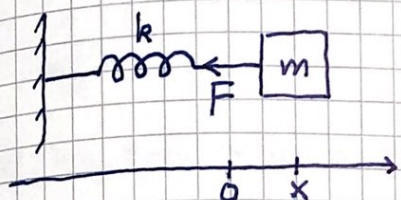
Periodisk (gjentakende) oppførsel omkring en likevekt.

Eks: Masse og fjær. Pendler. Atomene i molekyler og krystaller.

Ladning og strøm i elektriske kretser.

Harmonisk oscillator

[OS1 15.1]



$x(t)$ = posisjonen til m

$x = 0$: likevekt, $F = 0$

$x > 0$: strukket fjær, $F < 0$

$x < 0$: sammenpresset fjær, $F > 0$

Hookes lov : $F(x) = -kx$ = kraft fra fjæra på m

k = fjærkonstanten, $[k] = \text{N/m}$

N2: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med $\omega_0^2 = k/m$

Løsning: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ evt $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

A = amplitude = max utsving fra likevekt

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet (s^{-1})

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning (s)

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet (Hz)

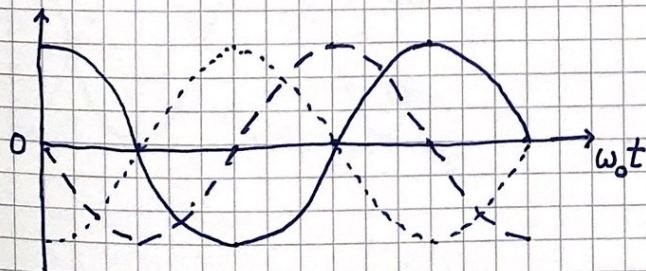
φ = fasekonstant

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

A og φ (evt B og C) fastlegges med to startbetingelser,

f.eks kjennskap til $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

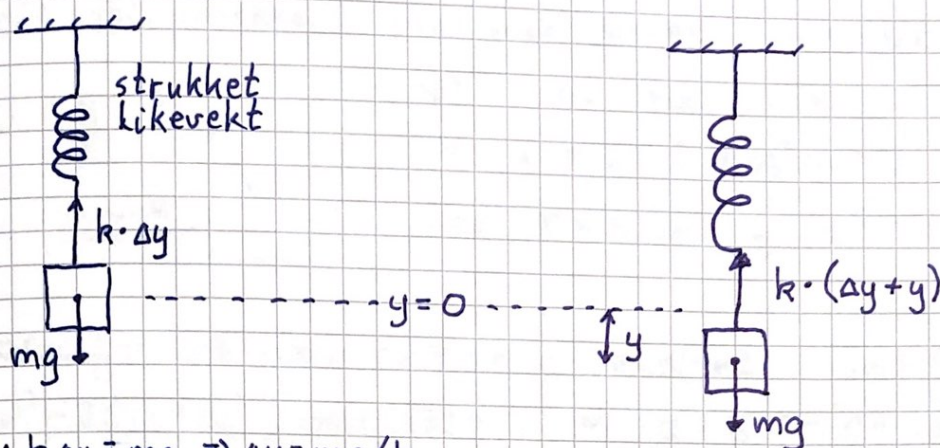
Med $\varphi = 0$ er $x = A \cos \omega_0 t$; $\dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$ og $\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$



— x
- - $\dot{x}$
... $\ddot{x}$

Masse og fjær i tyngdefeltet:

(36)



$$N1: k\Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

$$N2: mg - k(\Delta y + y) = m\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$\Rightarrow$ Harmonisk svingning om strukket likevekt; uendret frekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2]

Anta $\varphi = 0$ og $x(t) = A \cos \omega_0 t$; $\dot{x} = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$

Pot. energi:

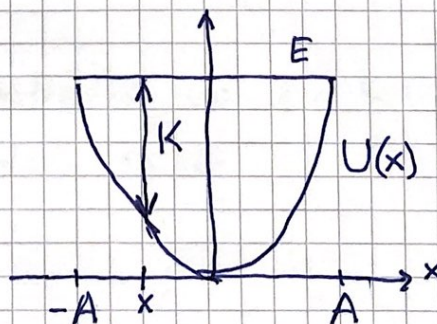
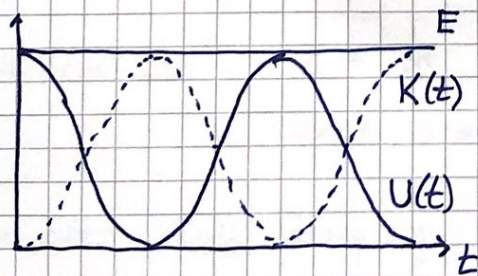
$$U = -\int_0^x F(x) dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kin. energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mek. energi: $E = K + U = \frac{1}{2} kA^2$ uavh. av t

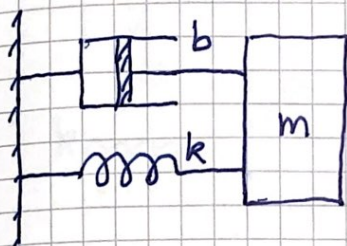
Dvs: Fjærkraften er konservativ



Dempet fri svingning [OS1 15.5]

(37)

Anta friksjonskraft prop. med farten: $f = -b\dot{x}$



$$\text{N2: } -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m \text{ og } \omega_0^2 = k/m$$

Løsninger må være på formen $\exp(-\alpha t)$; innsetting gir:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] \exp(-\alpha t) = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping: $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow x(t) = (A + Bt) \exp(-\gamma t)$

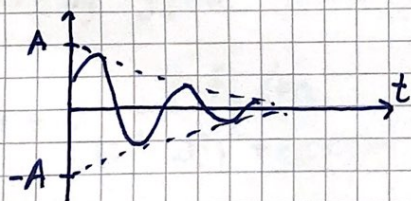
Svakeste demping som ikke gir svingninger. Bra i støtdempere.

Overkritisk demping: $\gamma > \omega_0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$x(t) = A \exp(-\alpha_1 t) + B \exp(-\alpha_2 t)$$

Underkritisk demping: $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \alpha = \gamma \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; $i = \sqrt{-1}$
 $\exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot (\cos \omega t \pm i \sin \omega t)$

Reell løsning: $x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \varphi)$; harm. svingn. med eksponentielt avtagende amplitude $A \exp(-\gamma t)$



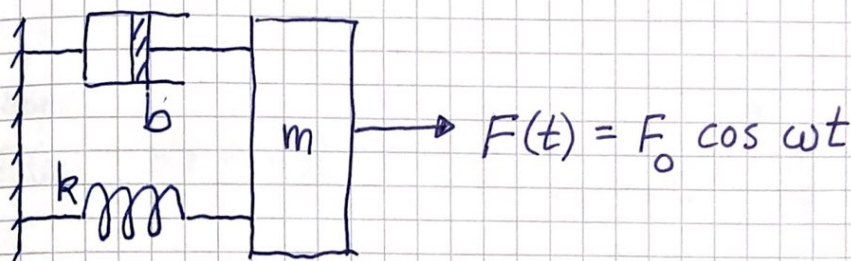
Omhyllningskurver:

$$\text{-----} \pm A e^{-\gamma t}$$

Tidskonstant: $\tau = \frac{1}{\gamma}$ er et omtrentlig mål for hvor lenge svingeberegelsen varer

Har ofte svak demping:

$$\gamma \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$$



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m) \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen del x_h oppfyller homogen ligning:

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

$\Rightarrow x_h(t)$ prop. med $\exp(-\gamma t)$ og dempes ut etter innsvingningsforløp med varighet ca $5\tau = 5/\gamma$. ($e^{-5} < 1\%$)

Etter dette er $x(t) \approx x_p(t)$, som må være på formen

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] = A(\omega) \{ \sin \omega t \cos \varphi(\omega) + \cos \omega t \sin \varphi(\omega) \}$$

Innsetting av x_p , $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ gir 2 ligninger på formen

$$\sin(\omega t) \cdot f_1(A, \varphi) = 0 \quad \text{og} \quad \cos(\omega t) \cdot f_2(A, \varphi) = 0, \quad \text{slik at}$$

$f_1 = 0$ og $f_2 = 0$ fastlegger A og φ . Løsningen er:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right]$$

Resonans: Svak damping ($\gamma \ll \omega_0$) og en ytre kraft med frekvens $\omega \approx \omega_0$ gir en stor amplitude A , og dermed mye energi

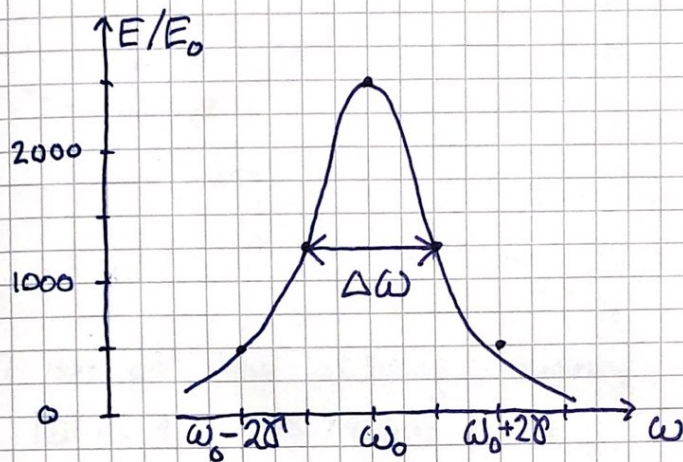
$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

i oscillatoren.

Eks: Anta svak damping, $\gamma = \omega_0/100$, og plott $E(\omega)$ (39)

Løsn:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} k A^2(\omega) = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad \text{med } E_0 = \frac{F_0^2}{2k}$$



$$E(\omega_0) = 2500 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0$$

$$E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$$

Resonanskurvens halvverdibredde

(FWHM : Full Width at Half Maximum) :

$$\Delta\omega = 2\gamma = b/m$$

Oscillatorens Q-faktor (godhetsfaktor; Quality factor):

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

Svak damping $\Rightarrow Q \gg 1$ og smal resonanskurve

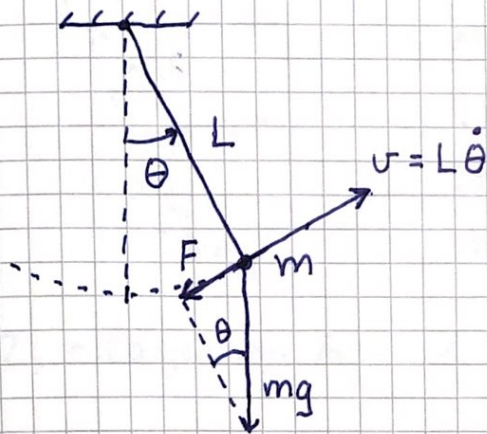
$$\text{Her : } \Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/50 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q=50}$$

Pendler

[051 15.4]

(40)

Matematisk pendel : Punktmasse i masseløs stang/snor



N2 || sirkelbanen :

$$F = ma$$

med

$$F = -mg \sin \theta$$

$$a = \dot{v} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + (g/L) \sin \theta = 0$$

Vi ser på små utsving omkring likevekt:

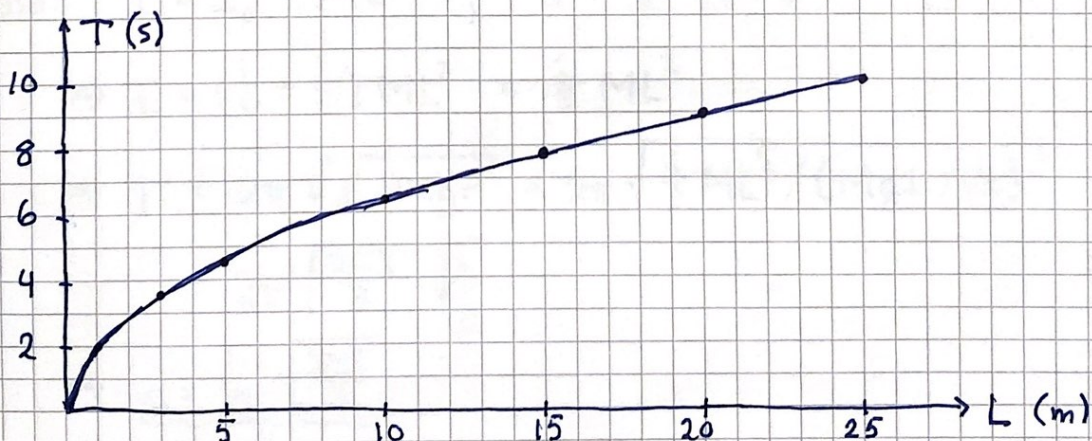
$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

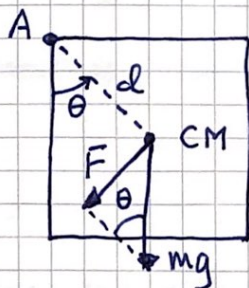
Eks: Foucaultpendelen i Realfabbygget

$$L = 25\text{m} \Rightarrow \text{Periode } T = 2\pi/\omega_0 \approx \underline{10\text{s}}$$



Fysisk pendel: Stivt legeme; svinger om akse A
i avstand d fra CM.

(41)



Masse: m

Trehetsmoment mhp A: I

Dreiemoment mhp A:

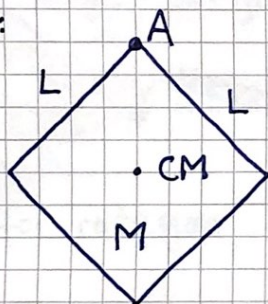
$$\tau = -F \cdot d = -mgd \sin \theta$$

$$\text{N2, rotasjon om A: } \tau = I \ddot{\theta} \Rightarrow -mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + (mgd/I) \sin \theta = 0$$

Antar også her små utsving slik at $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = mgd/I$$

Eks:



Svingetida er $T = c \cdot \sqrt{L/g}$

Bestem konstanten c .

(Test 6, Oppg. 4: $I_0 = \frac{1}{6} ML^2$)

$$\text{Løsn: } I = I_0 + Md^2 \quad ; \quad d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{L^2 + L^2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

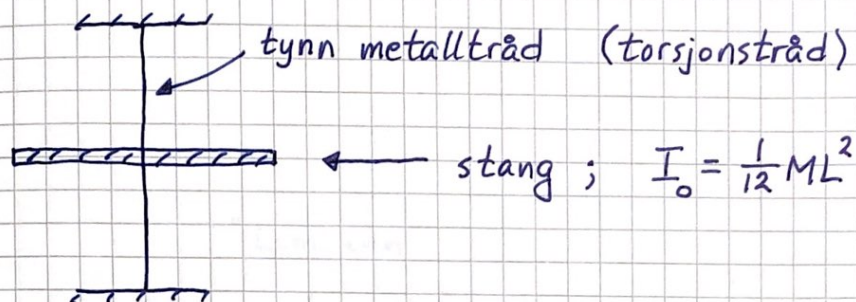
$$\Rightarrow I = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) ML^2 = \frac{2}{3} ML^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{I/Mgd} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} ML^2 / (MgL/\sqrt{2})} \\ = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\Rightarrow \underline{c = 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$

Torsjionspendel:

(42)



Tråden vris når stanga dreies en vinkel θ , slik at tråden påvirker stanga med et dreiemoment som er prop. med θ :

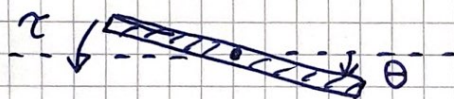
$$\tau = -\kappa \theta$$

Retvingen er tilbake mot likevekt ($\theta = 0$).

Trådens torsjonsstivhet: κ Enhet: $[\kappa] = \text{N} \cdot \text{m}$

(κ avhenger av trådens diameter, lengde og type materiale)

Sett langs torsjonstråden:



N2 for rotasjon om tråden: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ med } \omega_0^2 = \frac{\kappa}{I_0}$$

Vårt oppsett: $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$, $T = 0.8 \text{ s}$

Da kan κ fastlegges eksperimentelt:

$$\kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \approx \underline{\underline{0.003 \text{ N} \cdot \text{m}}}$$

MEKANIKK. ET LITE SAMMENDRAG I FORM AV FORMLER.

- Newtons andre lov: $F = dp/dt$ $p = mv = m\dot{r}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at$ $x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \theta_0 + \omega_0t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = F \cdot dr$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(r) = - \int_{r_0}^r F \cdot dr$ $F = -\nabla U(r)$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $f = -kv$ Luftmotstand (stor v): $f = -Dv^2 \hat{v}$
- Tyngdepunkt: $R_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i r_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int r \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\tau = r \times F$ Statisk likevekt: $\sum F_i = 0$ $\sum \tau_i = 0$
- Dreieimpuls: $L = r \times p$ N2 rotasjon: $\tau = dL/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $L = L_b + L_s = R_{CM} \times MV + I_0 \omega$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0 \omega^2$
- Tregghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$
 Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$
 Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I \frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellakse-teoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $F = -\frac{GMm}{r^2} \hat{r}$ $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ $g = F/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $T = 2\pi/\omega_0$ $f = 1/T = \omega_0/2\pi$
 Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$
 Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$
 $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\omega_0^2 = k/m$ $\gamma = b/2m$
 Underkritisk damping ($\gamma < \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
 Overkritisk damping ($\gamma > \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 Kritisk damping ($\gamma = \omega_0$) $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$
 (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$
 amplitude: $A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$
 halvverdbredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$