

ELEKTROMAGNETISME

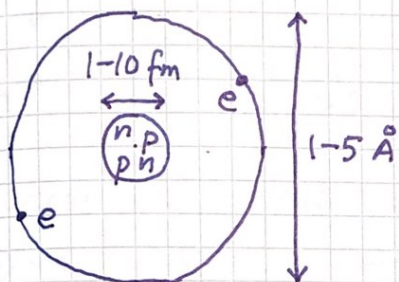
44

Elektrostatikk

[OS2 5-8]

Ladning [OS2 5.1]

Bohrs atommodell (1913; NP1922):



Partikkel	Symbol	Masse (kg)	Ladning
elektron	e	$9.11 \cdot 10^{-31}$	$-e$
proton	p	$1.67 \cdot 10^{-27}$	$+e$
nøytron	n	$1.67 \cdot 10^{-27}$	0

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}; 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} \text{ (ångström)}$$

Ladning er kvantisert i enheter av elementærladningen

$$e = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Symbol for ladning: q, Q Enhet: $[q] = \text{C}$ (coulomb)

Nøytralt atom, atomnummer Z :

$$Z \text{ protoner, } Z \text{ elektroner} \Rightarrow Q = Z \cdot e + Z \cdot (-e) = 0$$

Ioner: Atomer og molekyler med $Q \neq 0$

Eks: $\text{Na}^+, \text{Mg}^{2+}, \text{Cl}^-, \text{NH}_4^+, \text{OH}^-$

Isotoper av samme grunnstoff har ulikt antall nøytroner i atomkjernen

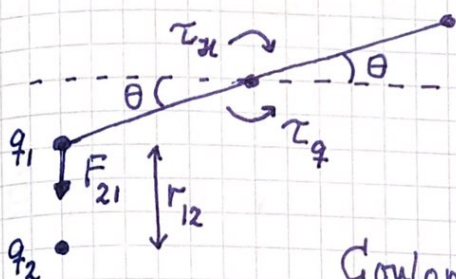
Eks: $^{12}\text{C}, ^{13}\text{C}, ^{14}\text{C}$; $Z=6 \Rightarrow$ hhv 6, 7, 8 nøytroner

^4_2He (ovenfor), ^3_2He

Coulombs lov [OS2 5.3]

(45)

Coulomb, 1785:



Torsjonspendel, sett ovenfra

Likerekt når $\tau_q = \tau_{el}$

$$\tau_{el} = k \theta \quad (5.42)$$

$$\tau_q = F_{21} \cdot \frac{1}{2} L \cdot \cos \theta$$

Coulomb fant: $F_{21} \sim q_1 q_2 / r_{12}^2$

Tiltrekning / Frastøtning mellom ulike / like typer ladning:



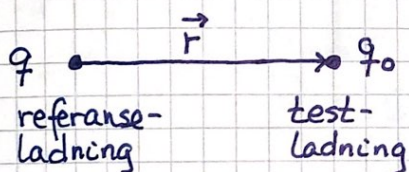
Coulombs lov:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{21}$$

$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = \text{vakuumpermittiviteten}$

($\Rightarrow 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$)

Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5]



Kraft fra q på q_0 :

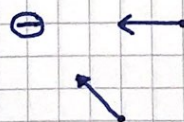
$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ el. kraft pr ladningsenhet

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \quad ; \quad [E] = \text{N/C}$$

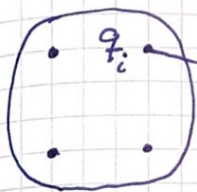
En punktladning q omgir seg med et elektrisk felt:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad ; \quad \text{retning bort fra / inn mot pos. / neg. ladning}$$



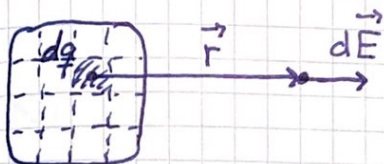
$\vec{E}$ fra system med flere punktladninger:

(46)



$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2}$$

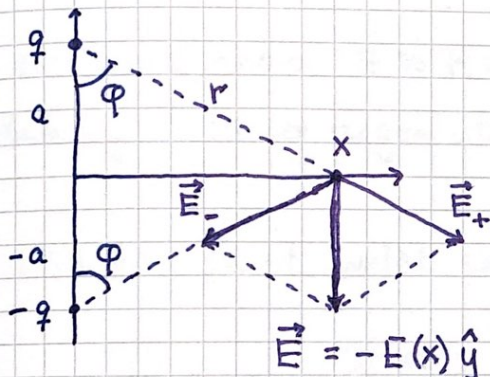
$\vec{E}$ fra kontinuerlig ladningsfordeling:



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dq \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Elektrisk dipol

$\pm q$ i $y = \pm a$; bestem $\vec{E}$ på x-aksen



$$E = 2E_+ \cos\phi \quad (E_- = E_+)$$

$$\cos\phi = a/r = a/\sqrt{x^2+a^2}$$

$$E_+ = q/4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

Langt unna dipolen, dvs $x \approx r \gg a$:

$$\vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa/4\pi\epsilon_0 r^3$$

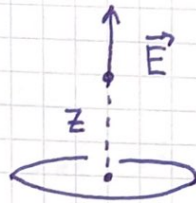
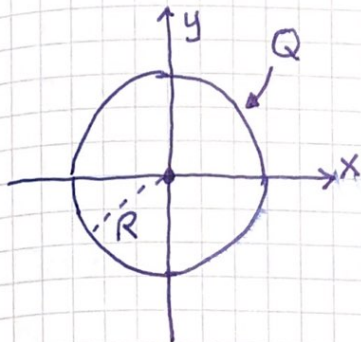
$\vec{E}_+$ og $\vec{E}_-$ kansellerer delvis. Dermed går $E(r)$ raskere mot null enn fra en enkelt punktladning.

Punktladning: $E(r) \sim 1/r^2$

Dipol: $E(r) \sim 1/r^3$

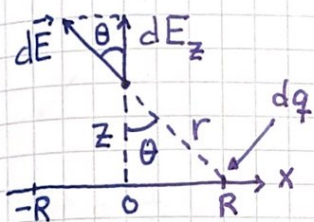
Eks 2: Jevnt ladet ring, $\vec{E}$ på symmetriaksen

(47)



Pga symmetri:

$$\vec{E} = E(z) \hat{z}$$



Felt fra dq : $dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$

med z-komponent $dE_z = dE \cdot \cos\theta$

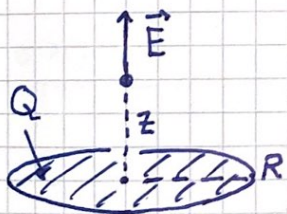
Fra figur: $\cos\theta = z/r$; $r^2 = z^2 + R^2$

$$\Rightarrow E(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}$$

Langt unna ringen, $z \gg R$: $E(z) = Q / 4\pi\epsilon_0 z^2$

Rimelig; da ser ringen ut som en punktladning Q i origo.

Eks 3: Jevnt ladet skive, $\vec{E}$ på symmetriaksen



Strategi: Skiva = (∞) mange tynne ringer med radius r , bredde dr , areal $dA = 2\pi r dr$,

ladning $dq = Q dA / A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2$, som bidrar med $dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}$ til feltet $\vec{E} = E(z) \hat{z}$ på z-aksen.

Integrasjon fra $r=0$ til $r=R$ gir

$$E(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \left(1 + R^2/z^2 \right)^{-1/2} \right\}$$

Viktigst for oss: Nær skiva, dvs $z \ll R$

Da er: $E \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$; uavhengig av z !

Skivas ladning pr flateenhet: $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2}$

Feltlinjer for $\vec{E}$ [052 5.6]

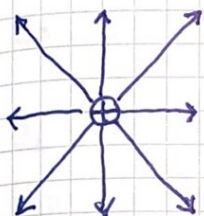
(48)

Gir et bilde av $\vec{E}$ omkring ladningene

Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ prop. med antall feltlinjer pr flateenhet

Eks 1: Punktladning

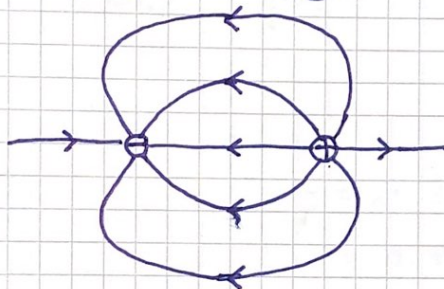


$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

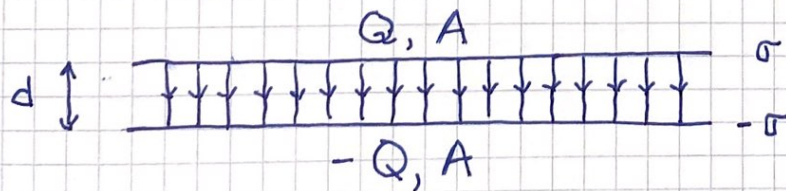
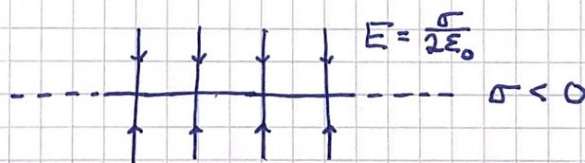
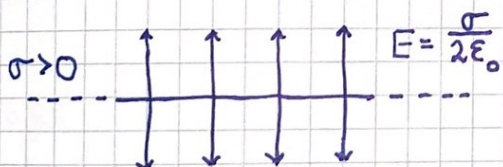


Ser at feltlinjer starter på positive og ender på negative ladninger

Eks 2: Dipol



Eks 3: Jevnt ladet plate og parallelplatekondensator



Når $d \ll \sqrt{A}$, er $\vec{E}$ omtrent konstant mellom platene.

Feltstyrke: $E = 2 \cdot \sigma / 2\epsilon_0 = \sigma / \epsilon_0$

Utenfor volumet mellom platene: $E \approx 0$

Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7]

(49)

En enkel dipol, $-q \xrightarrow{d} q$, har dipolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$

Flere punktladninger q_i i pos. $\vec{r}_i$: $\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$

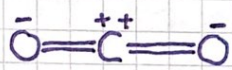
Kontinuerlig ladningsfordeling : $\vec{p} = \int \vec{r} dq$

En dipol har nettoladning null: $\sum_i q_i = 0$ evt $\int dq = 0$

SI-enhet: $[p] = C \cdot m$

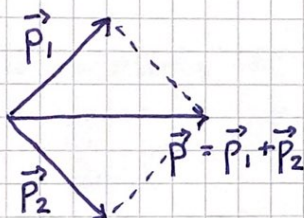
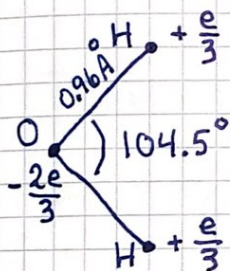
Enheden debye : $1D = 10^{-21} C \cdot m / 299792458 \approx 3.336 \cdot 10^{-30} C \cdot m$

Eks 1: CO_2



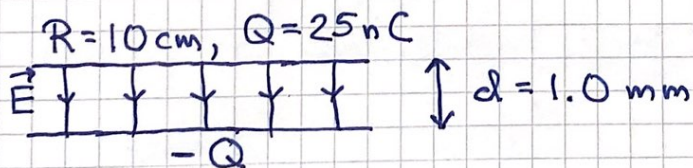
$p=0$

Eks 2: H_2O



$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \frac{e}{3} \cdot 0.96 \text{ \AA} \cdot \cos 52.25^\circ \\ &= 0.39 e \text{ \AA} = 6.3 \cdot 10^{-30} C \cdot m \\ &= 1.89 D \end{aligned}$$

Eks 3: Platekondensator



Beregn E og p

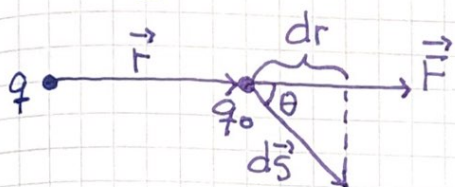
$$\sigma = Q/A = 25 \cdot 10^{-9} C / \pi \cdot (0.10 m)^2 = 8.0 \cdot 10^{-7} C/m^2$$

$$E = \sigma / \epsilon_0 = 9.0 \cdot 10^4 N/C$$

$$p = Q \cdot d = 2.5 \cdot 10^{-11} C \cdot m$$

Potensiell energi og elektrisk potensial [052 7.1-7.2] (50)

Endring dU i pot. energi for ladningspar når $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{s}$:



$$\begin{aligned} dU &= -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= -F \cdot dr = -q q_0 dr / 4\pi \epsilon_0 r^2 \end{aligned}$$

Vi velger $U=0$ når $r \rightarrow \infty$. Da er:

$$U(r) = - \int_{\infty}^r \frac{q q_0 dr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{pot. energi for ladningspar}$$

q og q_0 i innbyrdes avstand r

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ Pot. energi pr ladningsenhet

$$\Rightarrow V(r) = \frac{U(r)}{q_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{potensialet som } q \text{ omgir}$$

seg med = Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = V_f - V_i = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_i^f \frac{\vec{F}}{q_0} \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

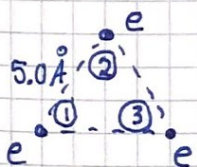
Enhet: $[V] = V$ (volt)

$$\Rightarrow [E] = V/m$$

Nyttig energienhet på atomært nivå:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV (elektronvolt)} &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} \\ &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \end{aligned}$$

Eks 1: U for flere punktladninger



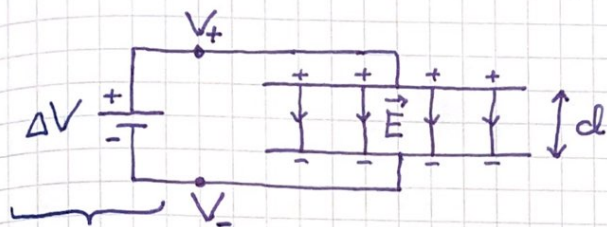
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} = \text{bidrag fra paret } q_i \text{ og } q_j$$

$$\Rightarrow U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = 3 \cdot \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \cdot 5.0 \text{ Å}}$$

$$= 1.38 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \underline{8.64 \text{ eV}} \quad [\text{Alle par bidrar}]$$

Eks 2: Platekondensator. Kapasitans. [052 8]

(51)



$$R = 10 \text{ cm}, \quad d = 1.0 \text{ mm}$$

$$\Delta V = 30 \text{ V}$$

Likespenningskilde: Sørger for potensialforskjell (spenning) $\Delta V = V_+ - V_-$ mellom de to kontaktene (polene).

Kondensatorens kapasitans:

$$C = Q / \Delta V \quad \text{Enhet: } [C] = \frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Symbol i elektriske kretser:

Bestem E , $\pm Q$ og C for kondensatoren ovenfor.

Løsning:

$$\Delta V = - \int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d$$

$$\Rightarrow E = \Delta V / d = 30 \text{ V} / 0.001 \text{ m} = \underline{30 \text{ kV/m}}$$

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow Q = \sigma A = \epsilon_0 E \cdot \pi R^2 = \underline{8.3 \text{ nC}}$$

$$C = Q / \Delta V = \sigma A / E d = \underline{\epsilon_0 A / d} = \underline{0.28 \text{ nF}}$$

Enhet for permittivitet:

$$[\epsilon_0] = [C \cdot d / A] = F/m$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4]

(52)

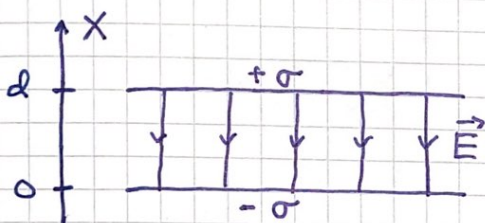
Fra s.16: $\vec{F} = -\nabla U$ Med $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ og $U = q_0 V$ følger:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Eks 1: Punktladning

$$V(r) = q/4\pi\epsilon_0 r; \text{ kulesymmetri, da er } \nabla = \hat{r} \frac{d}{dr}$$
$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{r} dV/dr = \hat{r} q/4\pi\epsilon_0 r^2 \quad OK$$

Eks 2: Platekondensator



Anta $V(0) = 0$.

Bestem $V(x)$.

Løsn 2: Vet fra før at $\vec{E}(x) = -\hat{x} \sigma/\epsilon_0$ mellom platene og at $E=0$ utenfor. Da må vi finne en $V(x)$ slik at $\vec{E} = -\nabla V(x) = -\hat{x} dV(x)/dx$.

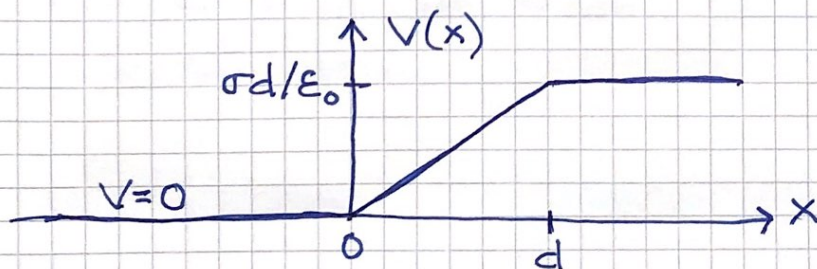
Dvs: $dV/dx = \sigma/\epsilon_0$ og $V(0) = 0$

$\Rightarrow V(x) = \sigma x/\epsilon_0$ mellom platene

Utenfor er $E=0$, og dermed $V = \text{konstant}$.

Kontinuerlig $V(x)$ gir $V(x)=0$ for $x \leq 0$ og

$V(x) = \sigma d/\epsilon_0$ for $x \geq d$.



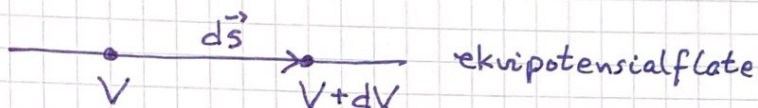
Ekvipotensial [052 7.5]

(53)

... er et område (kurve, flate eller volum) der V er konstant.

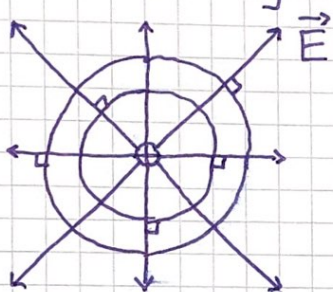
$\vec{E}$ står normalt på ekvipotensialflatene.

Beris:



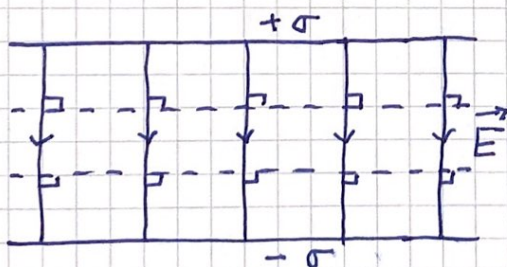
$$dV = 0 \Rightarrow -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{s} \quad (\text{ged})$$

Eks 1: Punktladning



$\Rightarrow$ Kuleskall som ekvipot. flater

Eks 2: Platekondensator



$\Rightarrow$ Plan $\perp \vec{E}$ som ekvipot. flater
(mellom platene)