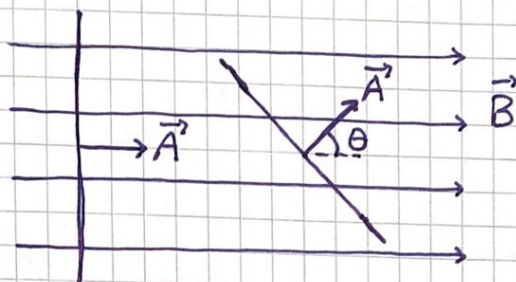


Magnetisk fluks

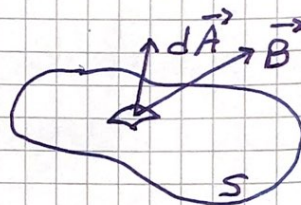
[052 13.1]



Flest feltlinjer
gjennom en flate
når den står
normalt på $\vec{B}$

$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$ = magnetisk fluks gjennom flate med areal A og vinkel θ mellom $\vec{B}$ og $\vec{A}$.

Generelt: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$

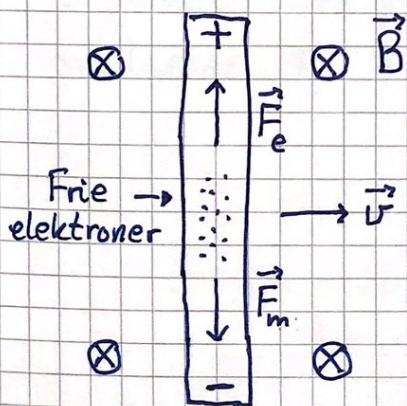


Enhet: $[\Phi] = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{Wb}$ (weber)

B prop. med antall feltlinjer pr flateenhet
 $\Rightarrow \Phi$ prop. med antall feltlinjer gjennom flaten

Faradays induksjonslov [052 13.1]

Leder, lengde l , trekkes med fart $\vec{v}$ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$:



$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B} \text{ på frie elektroner}$$

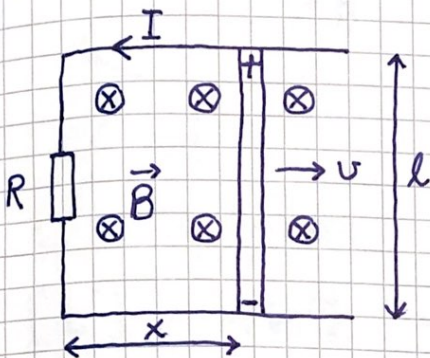
$\Rightarrow$ Netto negativ ladn. nederst,
netto positiv ladn. øverst

$\Rightarrow$ Et induert elektrisk felt $\vec{E}$
i lederen

$\Rightarrow$ En induert elektromotorisk
spenning $\Delta V = E \cdot l$
over lederen

Likerekt når $F_e = F_m \Rightarrow e \cdot E = e v B \Rightarrow E = v B$ (78)
 $\Rightarrow \Delta V = v B l$

Kan drive strøm i en lukket krets:



$$\begin{aligned} \Delta V &= v B l = \frac{dx}{dt} B l \\ &= \frac{d}{dt} (x B l) = \frac{d}{dt} (B \cdot A) \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) = \frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

Faradays induksjonslov: $\Delta V = - \frac{d\Phi}{dt}$

Indusert spenning i lukket sløyfe tilsvarer endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet.

Lenz' lov [OS2 13.2]

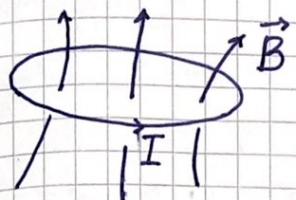
Indusert I skaper felt $\vec{B}_I$ og tilhørende omsluttet fluks $\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ som motvirker den påtrungne fluksendringen $\Delta\Phi$, som induserte ΔV og I i utgangspunktet.

Eks: I figuren ovenfor påtringes økt fluks inn i planet. Da går I mot klokka slik at tilhørende omsluttet Φ_I er positiv ut av planet.

Induktans og induksjon [052 14.1, 14.2]

(79)

Selvinduktans:



Pga Biot-Savarts lov er B prop. med I
 $\Rightarrow$ Omsluttet fluks prop. med I :

$$\Phi = L \cdot I$$

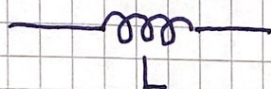
L = systemets (selv-)induktans

$$[L] = \text{Wb/A} = \text{H (henry)}$$

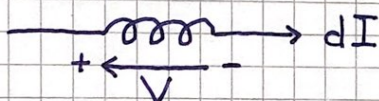
Selvinduksjon: En endring dI gir $d\Phi = L \cdot dI$
og dermed en indusert (mot-)spenning

$$V = - \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Induktans som kretselement (typisk en spole):

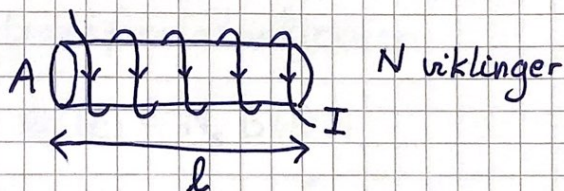


Retning på V slik at strømindringen motvirkes:



Eks: Ideell spole

$$B = \mu_0 n I ; n = N/l$$



$$\Rightarrow \Phi = NBA = (\mu_0 N^2 A / l) I$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \mu_0 N^2 A / l$$

Med ferromagnetisk kjerne: $\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_r \mu_0$ ($\mu_r \gg 1$)

$$\Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 A / l \quad (\Rightarrow [\mu] = \frac{\text{H}}{\text{m}})$$

3.f. s. 51

Gjensidig induktans:

(80)



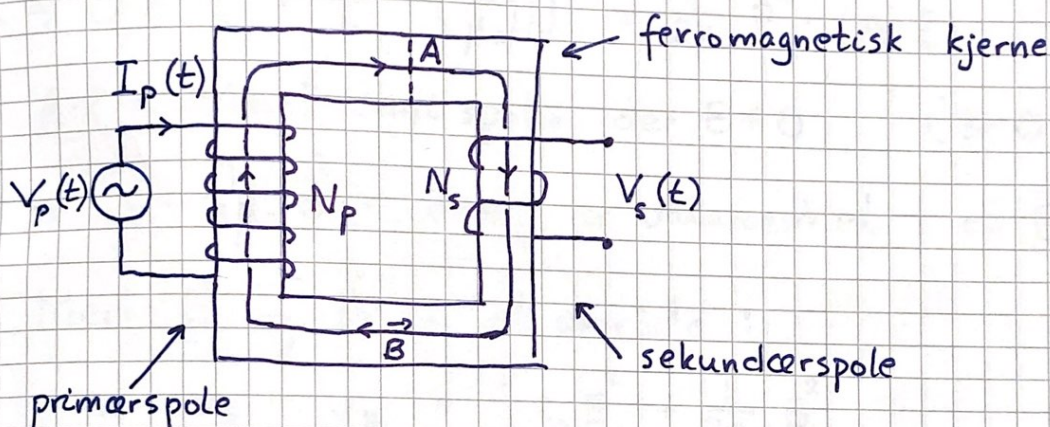
$I_1 \Rightarrow \vec{B}_1 \Rightarrow \Phi_2$ omsluttet av sløyfe 2
 B_1 prop med $I_1 \Rightarrow \Phi_2$ prop med I_1

$\Rightarrow \Phi_2 = M_{21} I_1$ og omvendt $\Phi_1 = M_{12} I_2$

Fra Biot-Savarts lov følger $M_{21} = M_{12} = M$
 som er sløyfenes gjensidige induktans. $[M] = H$

Gjensidig induksjon: $dI_1 \Rightarrow d\Phi_2 = M dI_1 \Rightarrow V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$
 og omvendt, $V_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$.

Eks: Transformator



$I_p(t)$ skaper $\vec{B}(t)$ i transformatorkjernen

$\Phi_p(t) = N_p B(t) A$; $\Phi_s(t) = N_s B(t) A$

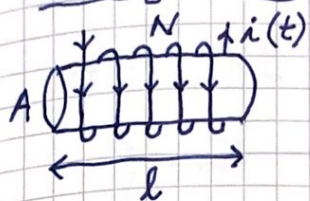
$V_p(t) = \dot{\Phi}_p(t) = N_p A \dot{B}(t)$; $V_s(t) = \dot{\Phi}_s(t) = N_s A \dot{B}(t)$

$\Rightarrow \frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \Rightarrow$ Amplituden til $V_p(t)$ kan transformeres
 ned ($N_s < N_p$) eller opp ($N_s > N_p$)

Energi i $\vec{B}$ -felt

[052 14.3]

(81)



Økning av strømmen fra $i=0$ til $i=I$ krever arbeid, for å overvinne induisert motspenning $v = L \cdot di/dt$

Tilført energi når $i \rightarrow i + di$:

$$dU = P \cdot dt = v \cdot i \cdot dt = L \cdot (di/dt) i dt = L \cdot i \cdot di$$

Total energi tilført, og dermed lagret i spolen:

$$U = \int dU = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

Antar ideell spole: $L = \mu_0 N^2 A / l$ og $I = \frac{B}{\mu_0 N / l}$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \left(\frac{B l}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \cdot (A \cdot l)$$

$A \cdot l$ = volumet inni spolen, der $B \neq 0$ ($B=0$ utenfor)

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 = \text{energi pr volumenhett i et } \vec{B}\text{-felt}$$

Med $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i et område:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

Eks: Elektromagnetisk bølge (s. 57)

$$\vec{v} = c \hat{x}; \quad \vec{E} = E_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t); \quad \vec{B} = B_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t)$$

Kan vises (fra Maxwells ligninger) at $B_0 = E_0 / c$

Dermed:

$$\langle u_E \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{1}{2}; \quad \langle u_B \rangle = \langle u_E \rangle \quad \text{sidan} \quad \frac{1}{\mu_0 c^2} = \epsilon_0$$

$\uparrow$
 $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$

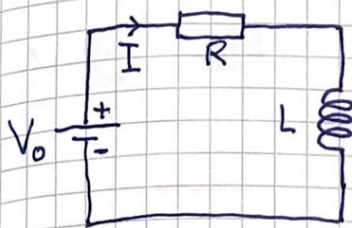
$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2 \mu_0} B_0^2$$

Avsluttende eksempler

[052 14, 15]

(82)

Eks 1: RL-krets

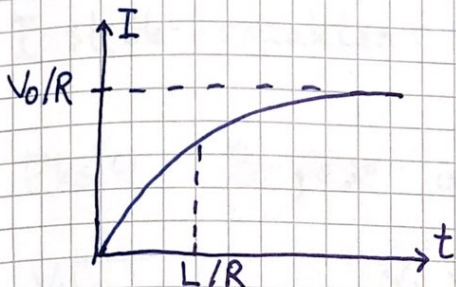


Finn $I(t)$ når V_0 kobles til ved $t=0$.

$$K2: V_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

dvs samme ligning for $I(t)$ som vi hadde for $Q(t)$ i RC-kretsen

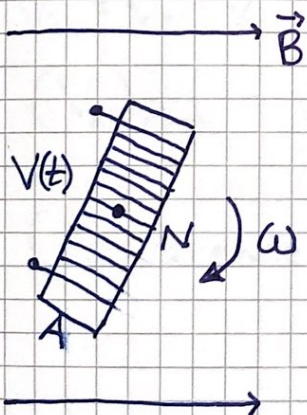
$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{med tidskonstant } \tau = L/R$$



Pga induert motspenning i spolen tar det litt tid å øke strømmen, fra $I=0$ til $I_{\max} = V_0/R$.

Eks 2: Vekselspanning

Vann og vind kan drive en turbin og rotere en spole i et magnetfelt:



Omsluttet fluks:

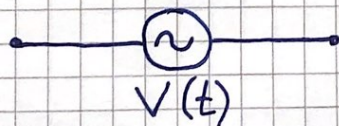
$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t$$

Indusert vekselspanning
(AC: alternating current):

$$V(t) = V_0 \sin \omega t$$

med amplitude $V_0 = NBA\omega$

Kretssymbol:

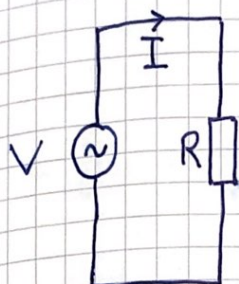


Frekvens: $f = \omega/2\pi$

Europa: $f = 50 \text{ Hz}$

Eks 3: Effektivverdier

(83)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0 / R$$

$$\text{Effekttap: } P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

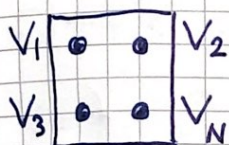
$$\Rightarrow \text{Midlere effekttap: } \langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

Uttrykt ved effektivverdier (rms-verdier):

$$\langle P \rangle = V_{\text{rms}} \cdot I_{\text{rms}} ; V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} ; I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{I stikk-kontakten: } V_{\text{rms}} = 230 \text{ V} \Rightarrow V_0 = 325 \text{ V}$$

Eks 4: 3-fase og 400 V



$$V_1 = V_0 \sin \omega t$$

$$V_2 = V_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

$$V_3 = V_0 \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

$$V_N = 0$$

(nøytral-
leder)

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

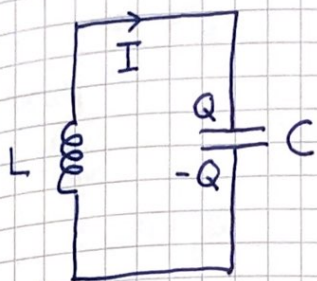
$$\Rightarrow V_{21} = V_2 - V_1 = 2 V_0 \cos(\omega t + \pi/3) \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow (V_{21})_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3}{2}} V_0 = 400 \text{ V} \text{ dersom } V_0 = 325 \text{ V}$$

(Tilsvarende for V_{32} og V_{31})

Eks 5: LC-krets og mekanisk analogi

(84)



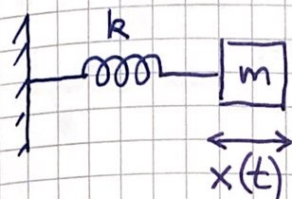
$$K2: -L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0 ; I = \dot{Q}$$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 ; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Med $Q = Q_0$ og $I = 0$ ved $t = 0$:

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t ; I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Med $x = x_0$ og $v = 0$ ved $t = 0$:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t ; v(t) = -\omega_0 x_0 \sin \omega_0 t$$

Analoge størrelser:

$$Q \leftrightarrow x ; I \leftrightarrow \dot{x} ; L \leftrightarrow m ; C \leftrightarrow \frac{1}{k}$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \text{---||--- } \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$$

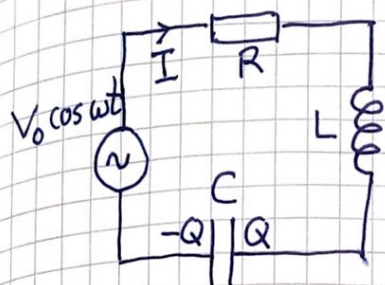
Konservative systemer, uten tap (dissipasjon) av energi:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{L I^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{L}{2} \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$\left(\text{siden } L \omega_0^2 = C^{-1} \right) \quad \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant (uavh. av t)}$$

Eks 6: RLC resonanskrets

(85)



$$K2: V_0 \cos \omega t - R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \cos \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: F_0 \cos \omega t - b\dot{x} - kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

Analogier:

$$b \leftrightarrow R, \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

Må ha $Q(t)$ på samme form som $x(t)$:

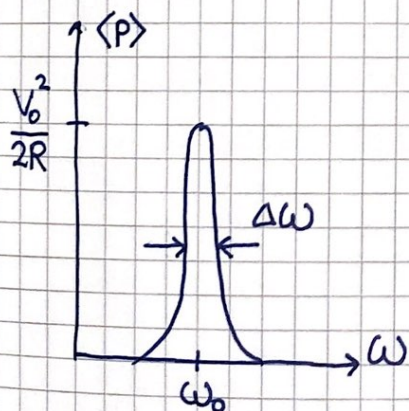
$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi); \quad Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}}$$

med $\gamma = R/2L$

$$\Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega \cdot Q_0(\omega)$$

Tilført effekt (= tapt effekt i R):

$$\langle P \rangle(\omega) = \langle V(t)I(t) \rangle$$



På resonans ($\omega = \omega_0$): $\langle P \rangle = \frac{V_0^2}{2R}$

og $I_0 = V_0/R$, for da er jo

$$L\ddot{Q} + Q/C = 0, \text{ dvs } RI = V_0 \cos \omega t$$

Halverdibredde: $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

Qoscillatorens godhetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$