TFY4104/TFY4125 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 5.

Oppgave 1.

a) Hastigheten v_1 til kule 1 like før kollisjonen finnes lettest ved å bruke energibevarelse:

$$\begin{aligned} m_1 g L &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Riktig svar: C.

b) Like før støtet antar vi at snora er vertikal, og dermed er det bare vertikale krefter som virker. Kun snordraget S_1 (oppover) og tyngden $m_1 g$ (nedover) virker på kule 1, og N2 gir

$$\begin{aligned} S_1 - m_1 g &= m_1 a = m_1 \frac{v_1^2}{L} = 2 m_1 g \\ \Rightarrow S_1 &= m_1 g + 2 m_1 g = 3 m_1 g \end{aligned}$$

Riktig svar: C.

c) Etter et fullstendig uelastisk støt vil kulene henge sammen. I kollisjonen er impulsen bevart, men ikke energien. Impulsbevarelse gir felleshastigheten $v_1' = v_2' = v'$ etter støtet:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ \Rightarrow m_1 v_1 &= (m_1 + m_2) v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL} \end{aligned}$$

Etter kollisjonen svinger kulene til venstre opp til en posisjon i høyde h. Energibevarelse for denne delen av bevegelsen gir

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) g h &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2)(v')^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{(v')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 L \end{aligned}$$

Riktig svar: E. (Snora når med andre ord ikke opp til horisontal stilling og er helt sikkert stram.)

d) Energien etter støtet er

$$(m_1 + m_2) g h = g \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} L$$

mens den før støtet var $m_1 g L$. Forholdet blir dermed

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Riktig svar: A.

e) I et elastisk støt er også energien bevart. Hastighetene v_1' og v_2' etter støtet er gitt av de to ligningene:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad \text{(impulsbevarelse)} \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 \qquad \text{(energibevarelse)} \end{aligned}$$

En effektiv måte å løse disse to ligningene på er (som antydet i forelesningene) å skrive

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_1') &= m_2 v_2' \\ m_1(v_1^2 - (v_1')^2) &= m_2 (v_2')^2 \end{aligned}$$

og deretter dividere den siste med den første. Det gir $v_1 + v_1' = v_2'$. Dette innsatt i ligningen for impulsbevarelse lar oss eliminere v_2', og vi finner

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2(v_1 + v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \end{aligned}$$

Dermed:

$$v_2' = v_1 + v_1' = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_1.$$

(Positive fartsretninger mot venstre.) Riktig svar: B.

f) Det kritiske punktet for kule 2 er toppen. Med v_2'' for hastigheten til kule 2 i toppunktet gir N2 her:

$$\sum F = m_2 a \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' + m_2 g = m_2 (v_2'')^2 / L \qquad \Rightarrow \qquad S_2'' = m_2 (v_2'')^2 / L - m_2 g.$$

Dersom snora ikke skal slakkes, må snorkrafta S_2'' være større enn null, m.a.o.

$$(v_2'')^2 > gL.$$

Energibevarelse fra bunnpunkt til toppunkt for kule 2 bestemmer v_2'' uttrykt ved v_2' og L:

$$\frac{1}{2} m_2 (v_2')^2 = \frac{1}{2} m_2 (v_2'')^2 + m_2 g \cdot 2L \qquad \Rightarrow \qquad (v_2'')^2 = (v_2')^2 - 4gL.$$

Et uttrykk for v_2' har vi ovenfor. Dermed:

$$4v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 - g \cdot 4L > gL \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_1}{m_1 + m_2} > \sqrt{\frac{5gL}{4v_1^2}} \qquad \Rightarrow \qquad 1 + \frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4v_1^2}{5gL}}$$

Ovenfor har vi v_1 uttrykt ved g og L, som vi setter inn:

$$\frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4 \cdot 2gL}{5gL}} - 1 = \sqrt{\frac{8}{5}} - 1,$$

dvs

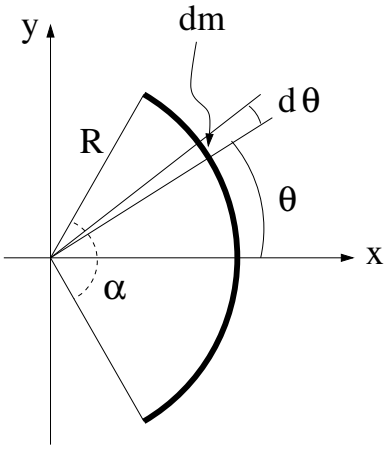
$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 2.

C. Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.

Oppgave 3



a) Massen til del av bøylen innenfor vinkelelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylens masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinkelelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{legeme}} x\, dm = \frac{1}{M}\cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha}\left[\sin\alpha - \sin(-\alpha)\right] = \underline{R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

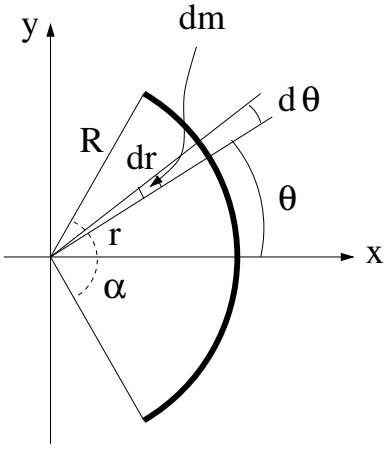
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinkelelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r\cos\theta$ blir tyngdepunktets x-verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M}\int_{\text{sektor}} x\, dm = \frac{1}{M}\cdot\frac{M}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\int_{r=0}^{R} r^2\cos\theta\, d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\int_{\theta=-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta \int_{r=0}^{R} r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{\alpha}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \\ &= \underline{\frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y-verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra *a*) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R. En bøyle med radius r har da $X = r\,(\sin\alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi}\pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X \;=\; \frac{1}{M}\int_{\text{alle bøyler}} X\,dm \;=\; \frac{1}{M}\int_0^R r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,M\frac{2r\cdot dr}{R^2} \;=\; \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{2}{R^2}\int_0^R r^2\,dr \;=\; \underline{\frac{2}{3}\,R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \to 0$ gir $(\sin\alpha)/\alpha \to 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.