FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.
Veiledning: 10. og 13. februar. Innleveringsfrist: Fredag 14. februar kl 16.
NB: Denne øvingen er obligatorisk.
Øving 5

Maxwellfordelingen

Innledning

I denne øvingen skal vi studere bevegelsen til sirkulære plastskiver på et luftputebord. Luftputebordet har vibrerende vegger som i gjennomsnitt tilfører skivene litt energi i kollisjonene mellom vegg og skive. Dette kompenserer for friksjon mellom skivene og underlaget, samt et visst energitap når skivene kolliderer med hverandre. Etter en viss tid har vi *stasjonære* forhold, der tilført energi fra veggene og tapt energi pga friksjon er like store. Vi kan da forvente at skivenes hastighetsfordeling også er stasjonær, og oppgaven går i korthet ut på bestemme denne hastighetsfordelingen og sammenligne med teoretisk forventet fordeling.

Filmen video8.wmv viser det studerte utsnittet av luftputebordet i ca 14 sekunder. I løpet av denne tiden har vi fulgt banen $(x(t), y(t))$ til 49 skiver. Eller mer presist, 49 skivebaner, siden en gitt skive kan forsvinne ut av bildet og komme inn i bildet igjen opp til flere ganger i løpet av de 14 sekundene. Med programmet tracker er de 49 banene kartlagt og lagret i hver sin fil, `mass8_1.txt, mass8_2.txt, ..., mass8_49.txt`. Disse 49 tekstfilene ligger samlet i fila maxwell.zip. Eksempelvis er innholdet i fila `mass8_24.txt` som følger:

```
mass8_24
t x y
6.352 -109.08 -109.808
6.431 -122.184 -88.696
6.495 -134.317 -67.826
6.56 -148.15 -47.685
```

Første linje er første del av filnavnet, andre linje angir hvilke størrelser som påfølgende data tallfester, og fra og med tredje linje kommer sammenhørende verdier av tid t (målt i sekunder), horisontal posisjon x og vertikal posisjon y. Tallverdiene for x og y må multipliseres med faktoren 0.22 for å få enheten centimeter. Bane nr 24 tilhører en skive som var inne i synsfeltet kun et par tiendedels sekunder før den forsvant ut av bildet igjen. Filmen er tatt opp med et webkamera som tar 15 bilder pr sekund.

To påfølgende bilder gir grunnlag for numerisk beregning av v_x, v_y og $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ for en gitt skive som er inne i synsfeltet. (For bane nr 24, med bare 4 bilder, kan vi beregne 3 verdier av v_x, v_y og v.) Alt i alt gir de 49 banene på denne måten grunnlag for 920 individuelle fartsmålinger. Hvis vi nå deler inn v-aksen (evt v_x-aksen og v_y-aksen) i passende store intervaller, kan vi telle opp hvor mange målinger som havner i hvert intervall, og til slutt tegne opp fordelingen(e) i et (eller flere) histogram.

Antagelsene som førte fram til Maxwellfordelingen for molekylenes hastigheter i en fortynnet gass var ikke annet enn at ingen retninger er spesielt foretrukne (isotrop fordeling) og at de ulike komponentene av hastigheten (her: v_x og v_y) er statistisk uavhengige. Er det noen grunn til å tro at disse antagelsene ikke skulle gjelde for skivene på luftputebordet? Nei, ikke så langt jeg kan se! Med andre ord, sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponenter på intervallene $(v_x, v_x + dv_x)$ og $(v_y, v_y + dv_y)$ er henholdsvis

$$g(v_x)\, dv_x = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\, e^{-Bv_x^2}\, dv_x$$

og

$$g(v_y)\, dv_y = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\, e^{-Bv_y^2}\, dv_y,$$

skivenes hastighetsfordeling blir

$$F(v) = g(v_x)\, g(v_y) = \frac{B}{\pi}\, e^{-Bv^2},$$

med $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, mens fartsfordelingen blir

$$f(v) = 2Bve^{-Bv^2}.$$

Her har vi brukt samme notasjon som i forelesningene, slik at $F(v)d^2v$ angir sannsynligheten for at en skive har hastighet mellom $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, mens $f(v)dv$ er sannsynligheten for at en skive har fart ($v = |\boldsymbol{v}|$) mellom v og $v + dv$.

Oppgaver

a) Last ned fila `maxwell.zip` og "pakk ut" de 49 txt-filene. Skriv ferdig MATLAB-programmet `maxwell.m` slik at dette plotter (1) samtlige fartsverdier i rekkefølge som beregnet i programmet; (2-4) histogram for skivenes fartsfordeling $f(v)$ og skivenes fordeling av hastighetskomponenter, hhv $g(v_x)$ og $g(v_y)$, samt (5-6) spredningsplott ("scatter plot") av henholdsvis v_x mot v_y og x mot y for samtlige målte verdier. I de tre histogrammene skal det også tegnes opp teoretiske fordelingsfunksjoner.

Tips:

- Bruk kommandoen `subplot`.
- Det er mange ulike "regler" for å velge antall intervaller ("bins") i et histogram (sjekk wikipedia). Med "The Rice Rule", $M \simeq 2N^{1/3}$ (neste heltall), får vi $M = 20$ intervaller med $N = 920$ datapunkter.
- Plott *normerte* sannsynlighetsfordelinger, dvs slik at summen av høydene til samtlige "søyler" i et gitt histogram blir lik 1.
- Som sagt, i de tre histogrammene skal det tegnes opp teoretiske fordelingsfunksjoner på formen gitt innledningsvis. Fastlegg B ved å beregne midlere kvadratiske hastighet og sette $B = 1/\langle v^2 \rangle$. De teoretiske fordelingene er nå normert i den forstand at

  $$\sum_i f_i \Delta v = 1,$$

  og tilsvarende for $g(v_x)$ og $g(v_y)$. Her angir f_i verdien av f midt i intervall nr i, og Δv er intervallbredden. Med fast antall intervaller M blir intervallbredden forskjellig i de tre histogrammene.
- Nedenfor finner du en figur basert på et lite utvalg av de i alt 49 plastskivebanene.
- Du velger selv i hvilken grad du vil benytte deg av strukturen som er foreslått i programmet `maxwell.m`. Vil du heller programmere i C++, Python eller Fortran, så er det selvsagt helt i orden.

b) Plastskivene har masse $m = 32$ g. Hva blir da verdien av "Boltzmanns plastskivekonstant" k_p? Dvs: Anvend det klassiske ekvipartisjonsprinsippet,

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = k_p T$$

(to uavhengige kvadratiske bidrag til energien i to dimensjoner) med $T = 300$ K, og fastlegg dermed k_p. Eller omvendt: Hvilken temperatur måtte en omgivende gass ha for å gi slike plastskiver en hastighetsfordeling som målt i dette eksperimentet?

c) Beregn plastskivenes midlere fart $\langle v \rangle$ og sammenlign med skivenes rms-hastighet $v_{\rm rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. Er forholdet mellom disse som forventet, dvs $\langle v \rangle / v_{\rm rms} = \sqrt{\pi}/2$? (Vis gjerne at det blir slik i to dimensjoner.)

d) Gir spredningsplottene av hastigheter og posisjoner et visuelt inntrykk omtrent som forventet? Er det tegn til drift i noen bestemt(e) retning(er)? Sammenlign med $\langle v_x \rangle$ og $\langle v_y \rangle$.

Figur basert på 10 av 49 plastskivebaner: