TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Innleveringsfrist: 30.10.22.

Obligatorisk øving 2

Maxwellfordelingen

Innledning

I denne øvingen skal vi studere bevegelsen til sirkulære plastskiver på et luftputebord. Luftputebordet har vibrerende vegger som i gjennomsnitt tilfører skivene litt energi i kollisjonene mellom vegg og skive. Dette kompenserer for friksjon mellom skivene og underlaget, samt et visst energitap når skivene kolliderer med hverandre. Etter en viss tid har vi *stasjonære* forhold, der tilført energi fra veggene og tapt energi pga friksjon er like store. Vi kan da forvente at skivenes hastighetsfordeling også er stasjonær, og oppgaven går i korthet ut på bestemme denne hastighetsfordelingen og sammenligne med teoretisk forventet fordeling.

Filmen video8.wmv i mappen `oblig2022/maxwell` på emnesiden viser det studerte utsnittet av luftputebordet i ca 14 sekunder. I løpet av denne tiden har vi fulgt banen $(x(t), y(t))$ til 49 skiver. Eller mer presist, 49 skivebaner, siden en gitt skive kan forsvinne ut av bildet og komme inn i bildet igjen opp til flere ganger i løpet av de 14 sekundene. Med programmet `tracker` er de 49 banene kartlagt og lagret i hver sin fil, `mass8_1.txt, mass8_2.txt, ..., mass8_49.txt`. Disse 49 tekstfilene ligger samlet i fila maxwell.zip i mappen `oblig2022/maxwell`. Eksempelvis er innholdet i fila `mass8_24.txt` som følger:

```
mass8_24
t x y
6.352 -109.08 -109.808
6.431 -122.184 -88.696
6.495 -134.317 -67.826
6.56 -148.15 -47.685
```

Første linje er første del av filnavnet, andre linje angir hvilke størrelser som påfølgende data tallfester, og fra og med tredje linje kommer sammenhørende verdier av tid t (målt i sekunder), horisontal posisjon x og vertikal posisjon y. Tallverdiene for x og y må multipliseres med faktoren 0.22 for å få enheten cm. Bane nr 24 tilhører en skive som var inne i synsfeltet kun et par tiendedels sekunder før den forsvant ut av bildet igjen. Filmen er tatt opp med et webkamera som tar 15 bilder pr sekund.

To påfølgende bilder gir grunnlag for numerisk beregning av v_x, v_y og $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ for en gitt skive som er inne i synsfeltet. (For bane nr 24, med bare 4 bilder, kan vi beregne 3 verdier av v_x, v_y og v.) Alt i alt gir de 49 banene på denne måten grunnlag for 920 individuelle fartsmålinger. Hvis vi nå deler inn v-aksen (evt v_x-aksen og v_y-aksen) i passende store intervaller, kan vi telle opp hvor mange målinger som havner i hvert intervall, og til slutt tegne opp fordelingene i ulike histogram.

Antagelsene som førte fram til Maxwellfordelingen for molekylenes hastigheter i en fortynnet gass var (1) isotrop fordeling og (2) statistisk uavhengige hastighetskomponenter (her: v_x og v_y). Vi skal undersøke om disse antagelsene også gjelder for skivene på luftputebordet. I såfall er sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponenter på intervallene $(v_x, v_x + dv_x)$ og $(v_y, v_y + dv_y)$ henholdsvis

$$g(v_x)\, dv_x = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\, e^{-Bv_x^2}\, dv_x$$

og

$$g(v_y)\, dv_y = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\, e^{-Bv_y^2}\, dv_y,$$

skivenes hastighetsfordeling blir

$$F(v) = g(v_x)\, g(v_y) = \frac{B}{\pi}\, e^{-Bv^2},$$

med $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, mens fartsfordelingen blir

$$f(v) = 2Bve^{-Bv^2}.$$

Her har vi brukt samme notasjon som i forelesningene, slik at $F(v)d^2v$ angir sannsynligheten for at en skive har hastighet mellom $\boldsymbol{v}$ og $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$, mens $f(v)dv$ er sannsynligheten for at en skive har fart ($v = |\boldsymbol{v}|$) mellom v og $v + dv$.

Oppgaver

a) Last ned fila `maxwell.zip` og "pakk ut" de 49 txt-filene. Lag et program som:

- leser inn alle verdier for t, x og y fra de 49 filene,
- beregner v_x, v_y og v, i alt 920 av hver,
- plotter histogram for skivenes fartsfordeling $f(v)$ og skivenes fordeling av hastighetskomponenter $g(v_x)$ og $g(v_y)$,
- lager spredningsplott ("scatter plot") av v_x vs v_y og x vs y for alle målte verdier.

I de tre histogrammene skal det også tegnes opp teoretiske fordelingsfunksjoner.

Noen tips:

- Det er mange ulike regler for å velge antall intervaller (bins) i et histogram (sjekk Wikipedia). Med *The Rice Rule*, $M \simeq 2N^{1/3}$ får vi $M = 20$ intervaller med $N = 920$ datapunkter.
- Plott *normerte* sannsynlighetsfordelinger, dvs slik at summen av høydene til samtlige søyler i et gitt histogram blir lik 1.
- Teoretiske fordelingsfunksjoner blir på formen gitt innledningsvis. Fastlegg B ved å beregne midlere kvadratiske hastighet og sette $B = 1/\langle v^2 \rangle$. De teoretiske fordelingene er nå normert i den forstand at

  $$\sum_i f_i \Delta v = 1,$$

  og tilsvarende for $g(v_x)$ og $g(v_y)$. Her angir f_i verdien av f midt i intervall nr i, og Δv er intervallbredden. Med fast antall intervaller M blir intervallbredden forskjellig i de tre histogrammene.
- Nedenfor finner du en figur basert på et lite utvalg av de i alt 49 plastskivebanene.

b) Plastskivene har masse $m = 32$ g. Hva blir da verdien av "Boltzmanns plastskivekonstant" k_p? Dvs: Anvend det klassiske ekvipartisjonsprinsippet,

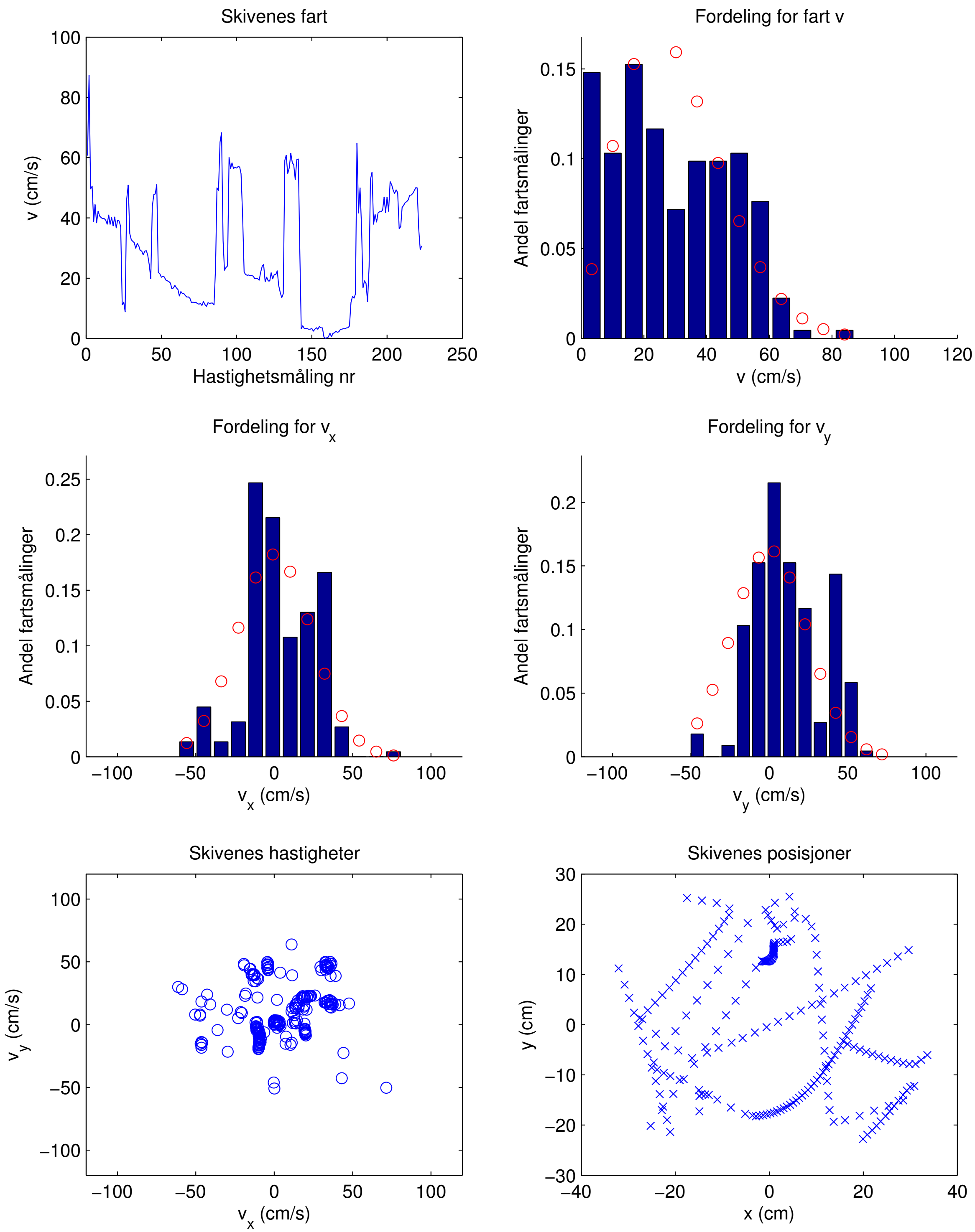
$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = k_p T$$

(to uavhengige kvadratiske bidrag til energien i to dimensjoner) med $T = 300$ K, og fastlegg dermed k_p. Eller omvendt: Hvilken temperatur måtte en omgivende gass ha for å gi slike plastskiver en hastighetsfordeling som målt i dette eksperimentet?

c) Beregn plastskivenes midlere fart $\langle v \rangle$ og sammenlign med skivenes rms-hastighet $v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$. Er forholdet mellom disse som forventet, dvs $\langle v \rangle / v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\pi}/2$? (Vis gjerne at det blir slik i to dimensjoner.)

d) Gir spredningsplottene av hastigheter og posisjoner et visuelt inntrykk omtrent som forventet? Er det tegn til drift i noen bestemt retning? Sammenlign med $\langle v_x \rangle$ og $\langle v_y \rangle$.

Neste side: Figur basert på 10 av 49 plastskivebaner.


Skivenes fart
v (cm/s)
Hastighetsmåling nr
Fordeling for fart v
Andel fartsmålinger
v (cm/s)
Fordeling for v_x
Andel fartsmålinger
v_x (cm/s)
Fordeling for v_y
Andel fartsmålinger
v_y (cm/s)
Skivenes hastigheter
v_y (cm/s)
v_x (cm/s)
Skivenes posisjoner
y (cm)
x (cm)