FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.

Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

I løpet av et tidsrom dt mottar motstanden energimengden $P\,dt$. Denne energien dissiperes i motstanden, som dermed varmes opp (”Joule heating”), dvs $đQ = P\,dt$. Samtidig er $đQ = C_p\,dT$, slik at

$$C_p = P\,\frac{dt}{dT} = \frac{P}{dT/dt}.$$

Derivasjon av den oppgitte $T(t)$ gir

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0 a}{4[1+a(t-t_0)]^{3/4}} = \frac{T_0^4 a/4}{T_0^3[1+a(t-t_0)]^{3/4}} = \frac{T_0 a}{4}\frac{T_0^3}{T^3},$$

slik at varmekapasiteten, som funksjon av temperaturen, blir

$$C_p = \frac{4P}{aT_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^3,$$

dvs proporsjonal med T^3, typisk temperaturavhengighet til varmekapasiteten for faste stoffer ved lave temperaturer. Dette kan du lære mer om i emnet Faste stoffers fysikk.

Oppgave 2

Fra definisjonen av energienheten cal (kalori) har vi direkte at $c_p = 1$ cal/gK for vann. Luft består nesten utelukkende av 2-atomige molekyler, og gjennomsnittlig molar masse er ca 29 g/mol. Dermed er (med $R = 8.314$ i enheten J/mol K) $c_p = (7R/2)/(29 \cdot 4.184)$ cal/gK $= 0.24$ cal/gK for luft. Molar varmekapasitet for metaller er ca $3R$, så med molar masse 55.9 g/mol har vi $c_p \simeq 3R/(55.9 \cdot 4.184)$ cal/gK $= 0.11$ cal/gK for jern. Med andre ord, $c_p(\text{vann}) \simeq 4c_p(\text{luft}) \simeq 9c_p(\text{jern})$.

Oppgave 3

Siden prosessen antas å være adiabatisk og reversibel, kan adiabatligningene for ideell gass benyttes. Her har vi bruk for

$$pT^{-\gamma/(\gamma-1)} = \text{konstant},$$

eventuelt

$$Tp^{-\kappa} = T_0 p_0^{-\kappa}, \quad \text{dvs} \quad T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa,$$

med $\kappa = (\gamma-1)/\gamma$. Her er trykkdifferansen $\Delta p = p - p_0$ liten (i forhold til p_0), slik at temperaturendringen $\Delta T = T - T_0$ blir

$$\begin{aligned}
\Delta T &= T - T_0 = T_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] \\
&= T_0\left[\left(\frac{p_0+\Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] \\
&= T_0\left[\left(1+\frac{\Delta p}{p_0}\right)^\kappa - 1\right] \\
&\simeq T_0 \cdot \kappa \cdot \frac{\Delta p}{p_0},
\end{aligned}$$

der vi har rekkeutviklet til laveste orden i den lille størrelsen $\Delta p/p_0$. (Dette er selvsagt ikke påkrevd; en kan godt bare sette inn tallverdier og trykke i vei på kalkulatoren.) Med $\gamma = 7/5$ for luft blir $\kappa = 2/7$, slik at

$$\Delta T \simeq 293 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-8.9}{760}\right) \text{ K} \simeq -1\text{K}.$$

Her har vi brukt at 1 atm = 760 mm Hg.
Siden størrelsen pV^γ er konstant for adiabater i en ideell gass, er det klart at lufta vil utvide seg når trykket reduseres. Kvantitativt:

$$V/V_0 = (T/T_0) \cdot (p_0/p) \simeq (292/293) \cdot (760/751) \simeq 1.01,$$

dvs utvidelse med omtrent 1%.

Oppgave 4

For ideell gass har vi adiabatligningene $pV^\gamma = \text{konst}$ og $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$. Slutt-trykket blir derfor lik

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = 1\,\text{atm} \cdot 18^{1.4} = 57.2\,\text{atm},$$

mens slutt-temperaturen blir (med $T_0 = 17°\text{C} = 290$ K)

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} = 290\,\text{K} \cdot 18^{0.4} = 922\,\text{K} = 649°\text{C}.$$

Her er ingen varme utvekslet med omgivelsene, slik at arbeidet tilsvarer endringen i indre energi: $Q = \Delta U + W = 0$. Vi kan nå gå fram på to måter for å bestemme arbeidet utført på gassen: Enten direkte ved å integrere $p(V)\,dV$, eller ved å regne ut endringen i indre energi, ΔU. La oss gjøre det på begge vis!
Direkte utregning:

$$W = \int_V^{V_0} p(V)\,dV = p_0 \int_V^{V_0} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma dV = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = 0.44\,\text{kJ}.$$

Endring i indre energi:
Vi vet at U er en tilstandsfunksjon, og vi kjenner her både start- og slutt-tilstand (både trykk, volum og temperatur). Da kan vi bestemme ΔU på den måten som passer oss best, dvs det spiller ingen rolle hva slags prosess (her: adiabatisk) som faktisk tok systemet fra start- til slutt-tilstand.
Vi vet videre at endringen i indre energi inngår i uttrykket for varmekapasiteten ved konstant volum, $C_V = (\partial U/\partial T)_V$. Dermed, hvis vi kjenner $C_V(T)$, kan vi bestemme ΔU ved å integrere $dU = C_V\,dT$.
Her er det klart at C_V er en konstant: Med $C_p - C_V = nR$ og $C_p/C_V = \gamma$ har vi $C_V = nR/(\gamma - 1) = 5nR/2$. Dermed er

$$|W| = \Delta U = C_V(T - T_0) = \frac{5}{2}nR(T - T_0) = \frac{5}{2}p_0 V_0\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = 2.5 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.80 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{922}{290} - 1\right) = 0.44\,\text{kJ}.$$

Samme svar med begge metoder!

Oppgave 5

Vi sammenligner V_g med ΔV_f:

$$\frac{V_g}{V_g - V_l} = (1 - V_l/V_g)^{-1} \simeq 1 + V_l/V_g.$$

La oss f.eks se på 1 kg vann, dvs 1 L, dvs $V_l = 10^{-3}$ m^3. Ideell gass tilstandsligning gir, for 1 kg vanndamp,

$$V_g = nRT/p = (1000\,\mathrm{g}/18\,\mathrm{g/mol}) \cdot (8.314\,\mathrm{J/mol\cdot K}) \cdot 373\,\mathrm{K}/1.013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \simeq 1.7\,\mathrm{m}^3,$$

slik at feilen vi gjør er ikke større enn ca 0.06%. Dette vil gjelde temmelig generelt: Ved omdanning av en viss mengde fast stoff eller væske til gass vil volumendringen som regel være praktisk talt lik gassens volum. Arbeidet mot det ytre trykket skjer ved konstant trykk, slik at dette blir

$$W = \int_{V_l}^{V_g} p\,dV = p(V_g - V_l) \simeq pV_g,$$

der vi kunne neglisjere volumet av vann, V_l, i forhold til volumet av vanndamp, V_g. Videre kan dampen med god tilnærmelse betraktes som en ideell gass, dvs $pV_g = nRT$. For n mol er fordampingsvarmen nL. Andelen av fordampingsvarmen som går med til arbeid mot det ytre trykket blir derfor (med $T = 100°\mathrm{C} = 373$ K)

$$\frac{W}{nL} = \frac{nRT}{nL} = \frac{RT}{L} = \frac{8.314 \cdot 373}{40.7 \cdot 10^3} = 0.076 = 7.6\%.$$

Oppgave 6

---

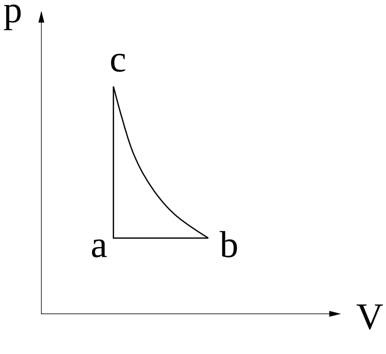
a) Jernbanen i Norge er ca 4000 km lang. Omtrent hvor mye lenger er den om sommeren enn om vinteren? Anta en temperaturforskjell på 20 grader. Lengdeutvidelseskoeffisienten for stål er $1.1 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}.

$\alpha = (\Delta L/L)/\Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \alpha L \Delta T = 1.1 \cdot 10^{-5} \cdot 4000 \cdot 20 \simeq 0.88$ km.
D) 0.88 km

---

b) Hva er et rimelig estimat for antall molekyler i lufta på soverommet ditt? Anta 3 m × 3 m × 2.4 m.

$V = 21.6$ m^3, slik at $N = pV/k_BT \simeq 10^5 \cdot 21.6/(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) \simeq 5 \cdot 10^{26}$.
B) $5 \cdot 10^{26}$



c) Figuren viser en reversibel kretsprosess for en ideell gass, bestående av en isobar, en isokor og en isentropisk (adiabatisk) prosess. Ranger temperaturene T_a, T_b og T_c i de tre hjørnene merket hhv a, b og c.

Adiabat brattere enn isoterm, dvs $T_b < T_c$. Videre er T_a åpenbart minst.

D) $T_a < T_b < T_c$