FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.

Løsningsforslag til øving 4

Oppgave 1

For enatomig gass har vi $c_{pm} = 5R/2$ og $c_{Vm} = 3R/2$, slik at $\gamma = C_p/C_V = 5/3$. Langs adiabaten er det (pr definisjon) ingen varmeutveksling med omgivelsene, $Q_{ab} = 0$. Fra c til a er volumet konstant slik at det ikke utføres noe arbeid, $W_{ca} = 0$. Trykket økes, som betyr at temperaturen også øker. Altså øker gassens indre energi fra c til a, og denne energien må da komme fra tilført varme, dvs $Q_{ca} > 0$. Fra b til c komprimeres gassen (til halvt volum) ved konstant trykk ($p_c = p_b$). Det betyr at gassen har utført et negativt arbeid på omgivelsene, $W_{bc} < 0$. Det er videre klart at temperaturen i c er lavere enn i b, siden produktet pV er mindre i c enn i b (halvparten så stort). Følgelig er indre energi redusert fra b til c, og det er klart at $Q_{bc} = \Delta U_{bc} + W_{bc} < 0$, dvs varme avgitt til omgivelsene.

Virkningsgraden er pr definisjon lik forholdet mellom netto utført arbeid W og tilført varme Q_{ca},

$$\eta = \frac{W}{Q_{ca}} = \frac{Q_{ca} + Q_{bc}}{Q_{ca}},$$

der vi i siste overgang benyttet oss av at indre energi er en tilstandsfunksjon, slik at netto utført arbeid tilsvarer netto tilført varme. Her tilføres og avgis varme ved hhv konstant volum og konstant trykk, så vi har direkte

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= C_V(T_a - T_c) = \frac{3}{2}nR(T_a - T_c), \\ Q_{bc} &= C_p(T_c - T_b) = -\frac{5}{2}nR(T_b - T_c). \end{aligned}$$

Vi har allerede slått fast at $p_b V_b = 2 p_c V_c$ slik at $T_b = 2T_c$. Langs adiabaten har vi

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \quad T_a = T_b \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1}\, T_b,$$

dvs $T_a = 2^\gamma T_c$. Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = 1 + \frac{Q_{bc}}{Q_{ca}} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b - T_c}{T_a - T_c} = 1 - \frac{5}{3}\frac{T_b/T_c - 1}{T_a/T_c - 1} = 1 - \frac{5}{3}\frac{2-1}{2^{5/3} - 1} \simeq 0.23.$$

En Carnot-maskin som opererer mellom et varmt reservoar med temperatur T_a og et kaldt reservoar med temperatur T_c ville ha virkningsgraden

$$\eta_C = 1 - T_c/T_a = 1 - 2^{-5/3} \simeq 0.69,$$

som altså er maksimal teoretisk virkningsgrad.

Som nevnt i oppgaveteksten kan arbeidet bestemmes ved å integrere $p(V)dV$. Langs adiabaten må en da benytte seg av at pV^γ er konstant. Fra b til c blir arbeidet ganske enkelt $p_b(V_a - V_b)$. Dette gir totalt arbeid uttrykt ved $p_b V_b$, som med ideell gass tilstandsligning kan erstattes med nRT_b, og her kan nR uttrykkes ved γ og C_V. Men tilført varme vil, som ovenfor, i utgangspunktet være uttrykt ved T_a og T_c, så en kommer ikke utenom å uttrykke disse ved T_b, slik vi gjorde ovenfor.

Oppgave 2

Kraftverkets virkningsgrad er

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{|Q_1| + W},$$

der Q_1 er avgitt varme som dumpes i elva. Oppgaven etterspør *effekter*, dvs energier pr tidsenhet, så la oss si at Q og W angir hhv varme og elektrisk energi (arbeid) pr tidsenhet, dvs varmeeffekt og elektrisk effekt. Vi løser ligningen ovenfor med hensyn på W og finner at kraftverket maksimalt kan levere en elektrisk effekt

$$W = \frac{\eta}{1-\eta}\,|Q_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 1500\,\mathrm{MW} = 1000\,\mathrm{MW}.$$

Dette krever tilførsel av en varmeeffekt

$$Q_2 = W + |Q_1| = 2500\,\mathrm{MW}.$$

Vannets spesifikke varmekapasitet kan skrives som

$$c = \frac{|Q_1|}{\Delta T \cdot M},$$

og hvis $|Q_1|$ her representerer varme pr tidsenhet, med enheten J/s, må M tilsvare forbipassert masse vann pr tidsenhet, med enheten kg/s. Nødvendig vannføring for å begrense ΔT til 5 K blir derfor

$$M = \frac{|Q_1|}{c \cdot \Delta T} = \frac{1500 \cdot 10^6\,\mathrm{J/s}}{4184\,\mathrm{J/kgK} \cdot 5\,\mathrm{K}} \simeq 71.7 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/s} \simeq 72\,\mathrm{tonn/s}.$$

Oppgave 3

a) La oss ta det enkleste først: Siden v_x^3 er en antisymmetrisk (odde) funksjon av v_x og $g(v_x)$ er en symmetrisk (like) funksjon av v_x, må integralet av produktet av disse to fra $-\infty$ til ∞ bli lik null. Videre er (med $b = m/2kT$ som i forelesningene):

$$\begin{aligned}
\langle |v_x| \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |v_x| g(v_x) dv_x = 2\int_0^{\infty} v_x g(v_x) dv_x \\
&= 2\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \\
&= \sqrt{\frac{2m}{\pi kT} \cdot \frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{kT}{m}} \simeq 0.80\sqrt{\frac{kT}{m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle v_x^4 \rangle &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(-\frac{d}{db}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\
&= \sqrt{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot b^{-5/2} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{m}{2kT}\right)^{-2} = 3\left(\frac{kT}{m}\right)^2
\end{aligned}$$

Med andre ord, $\langle v_x^4 \rangle^{1/4} \simeq 1.32\sqrt{kT/m}$.

b) Vi har fartsfordelingen $f(v)$ fra forelesningene, slik at

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{v} f(v) dv \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v e^{-mv^2/2kT} dv \\
&= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{kT}{m} \\
&= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{kT/m}} \\
&\simeq \frac{0.80}{\sqrt{kT/m}}
\end{aligned}$$

Til sammenligning er

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

(fra forelesningene), slik at

$$\frac{1}{\langle v \rangle} \simeq \frac{0.63}{\sqrt{kT/m}}.$$

Oppgave 4

a) Fra forelesningene har vi $\langle v^2 \rangle = 3kT/m_{\mathrm{molekyl}} = 3RT/M$, der R er gasskonstanten og M er molekylenes molare masse. Denne bør i følge oppgaven være mindre enn $V^2/36 = Gm/18r$, dvs

$$\frac{3RT}{M} < \frac{Gm}{18r} \quad \Rightarrow \quad T < \frac{GMm}{54Rr},$$

hvis vi på lang sikt skal unngå at molekylene forsvinner helt fra atmosfæren.

b) Jordas masse er $6.0 \cdot 10^{24}$ kg og dens radius er $6.4 \cdot 10^6$ m. Hydrogen, med molar masse 2 g, kunne derfor tenkes å finnes i jordas atmosfære dersom jordas overflatetemperatur var mindre enn ca 280 K. I gjennomsnitt er den litt høyere enn dette, ca 290 K, så vi kan ikke forvente å finne særlig mye hydrogen i vår atmosfære, konsistent med de faktiske forhold. Nitrogen og oksygen, derimot, har hhv 14 og 16 ganger større molar masse enn hydrogen, noe som gir en tilsvarende høyere toleranse for overflatetemperaturen, hhv 3900 K og 4460 K. Med andre ord, ingen overraskelse at både N_2 og O_2 har holdt seg på plass her nede.

For Jupiter er masse og radius hhv $1.9 \cdot 10^{27}$ kg og $7.2 \cdot 10^7$ m. Dette gir mulighet for hydrogen i atmosfæren med overflatetemperatur opp mot 8000 K. I virkeligheten er den ikke mer enn i overkant av 120 K, så det er fullt mulig med hydrogen på Jupiter. Jupiters atmosfære inneholder da også omlag 90% hydrogen.

Vår måne har masse og radius hhv $7.4 \cdot 10^{22}$ kg og $1.7 \cdot 10^6$ m. En atmosfære med nitrogen ville dermed fordre en overflatetemperatur mindre enn 177 K. I realiteten kommer temperaturen ved månens ekvator opp mot 400 K (på solsiden, selvsagt), konsistent med at månen praktisk talt ikke har noen atmosfære.

Oppgave 5

a) Sannsynlighetsfordelingen $p(s)$ må være normert, slik at

$$1 = p(1) + p(-1) = C\left(e^{-x} + e^{x}\right) = 2C\cosh x.$$

Dette fastlegger konstanten C og dermed partisjonsfunksjonen Z:

$$Z = 1/C = 2\cosh x = 2\cosh\frac{\mu_B B}{kT}.$$

b) Magnetiseringen blir $M = Nm/V$, dvs

$$M = \frac{N\mu_B}{V}\left(-p(1) + p(-1)\right) = \frac{N\mu_B}{V}C\left(-e^{-x} + e^{x}\right) = \frac{N\mu_B}{V}\frac{2\sinh x}{2\cosh x} = \frac{N\mu_B}{V}\tanh x,$$

med $x = \mu_B B/kT$. Vi bruker oppgitte grenseverdier for hyperbolsk tangens og får for høye temperaturer, dvs $x \ll 1$:

$$M = \frac{N\mu_B}{V}\cdot\frac{\mu_B B}{kT} = \frac{N\mu_B^2}{kV}\cdot\frac{B}{T},$$

i tråd med Curies lov, som nettopp sier at magnetiseringen er omvendt proporsjonal med temperaturen, for ikke for lave temperaturer.

I den motsatte grensen, dvs $x \gg 1$, er $\tanh x = 1$, og magnetiseringen blir

$$M = \frac{N\mu_B}{V}.$$

Som ventet: Det ytre magnetfeltet er så sterkt at alle elektronspinnene peker i samme retning som magnetfeltet (her: i positiv z-retning).

Hvis $T = 0$, er $x = \infty$ uansett styrken på magnetfeltet. Igjen er alle elektronspinn i laveste energitilstand (grunntilstanden), med samme retning som $\boldsymbol{B}$.

Magnetisme ved Institutt for fysikk

Det foregår mye spennende forskning med tilknytning til spinn og magnetisme ved Institutt for fysikk. KLIKK HER hvis du vil lese mer om instituttets forskning på spinntransport, magnetiseringsdynamikk og frustrerte kvantemekaniske magneter.

Figur 1: Arne Brataas, John Ove Fjærestad, Jacob Linder, Asle Sudbø og Jon Andreas Støvneng jobber alle med kondenserte mediers teori ved Institutt for fysikk.