FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.

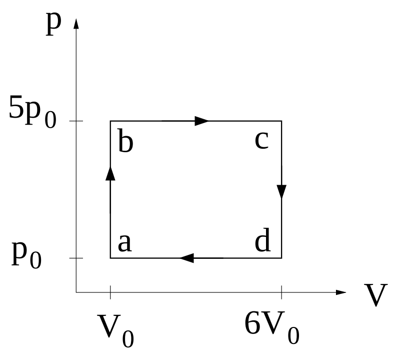
Løsningsforslag til øving 6

Oppgave 1

---

a) Et ideelt "Carnot-kjøleskap" holder konstant temperatur 4°C ("lavtemperaturreservoaret") i et kjellerrom der temperaturen er 13°C ("høytemperaturreservoaret"). Hva er kjøleskapets effektfaktor, dvs forholdet mellom varmen som trekkes ut av kjøleskapet og arbeidet som kjøleskapets motor må utføre? (Tips: For syklisk reversibel prosess er $\Delta S = 0$ og $\Delta U = 0$.)

$\varepsilon_K = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)|$. Vi bruker at $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$, dvs $Q_2 = -Q_1 T_2/T_1$, som innsatt i uttrykket for ε_K gir $\varepsilon_K = |T_1/(T_1 - T_2)| = 277/9 \simeq 31$.
D) Ca 31



b) Figuren viser en kretsprosess for et mol ideell gass, med $p_0 = 1$ atm og $V_0 = 5$ L. Omlag hvor stort arbeid utfører gassen pr syklus?

$W = 4p_0 \cdot 5V_0 = 20 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 10^4 = 10\,\mathrm{kJ}$.
C) 10 kJ

---

c) Ranger temperaturene i de fire hjørnene av kretsprosessen i oppgave *b*.

T_a er minst, T_c er størst. Siden T er proporsjonal med pV, er $T_b/T_d = p_b V_b / p_d V_d = 5/6$, dvs $T_b < T_d$.

B) $T_a < T_b < T_d < T_c$

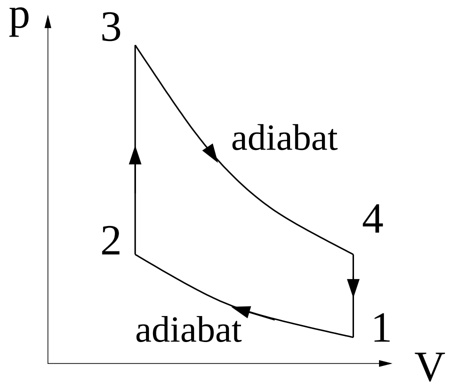
---

d) Dersom gassen i oppgave *b* hadde ekspandert isotermt fra tilstand *b* til en tilstand med trykk p_0, og deretter blitt komprimert ved konstant trykk tilbake til tilstand *a* og så varmet opp ved konstant volum til tilstand *b* osv, omtrent hvor stort arbeid ville gassen da ha utført pr syklus?

Siden $p_b V_b = 5p_0 V_0$, har vi her en isoterm ekspansjon fra tilstand *b* til en tilstand med trykk p_0 og volum $5V_0$. Arbeidet blir dermed

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{5V_0} p\, dV - 4p_0 V_0 = \int_{V_0}^{5V_0} \frac{5p_0 V_0}{V} dV - 4p_0 V_0 \\ &= 5p_0 V_0 \ln 5 - 4p_0 V_0 = 500 \cdot (5 \ln 5 - 4) \\ &\simeq 2.0 \cdot 10^3 = 2.0\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

C) 2.0 kJ



e) Figuren viser en Otto–syklus, dvs en reversibel idealisering av en 4–takts bensinmotor. Temperaturen i hjørnene 1 – 4 er hhv T_1 – T_4. Hva kan du si om virkningsgraden η_O til denne prosessen, i forhold til størrelsen $1 - T_1/T_3$? (Tips: T_1 og T_3 er hhv prosessens minimale og maksimale temperatur.)

I denne syklusen er T_3 maksimal og T_1 minimal temperatur. Hvis dette hadde vært en Carnot-prosess mellom to varmereservoar ved temperaturer T_3 og T_1, ville virkningsgraden ha vært $\eta_C = 1 - T_1/T_3$. Otto-syklusen kan ikke ha så stor virkningsgrad, slik at $\eta_O < \eta_C$. ($\eta_O = 1 - T_4/T_3$.)

A) $\eta_O < 1 - T_1/T_3$

---

f) Bensin/luft–blandingen i oppgave *e* har varmekapasitet C_V (ved konstant volum). Hva blir da arbeidet utført av bensin/luft–blandingen pr syklus av Otto–prosessen?

$\Delta U = 0$ for hel syklus, slik at

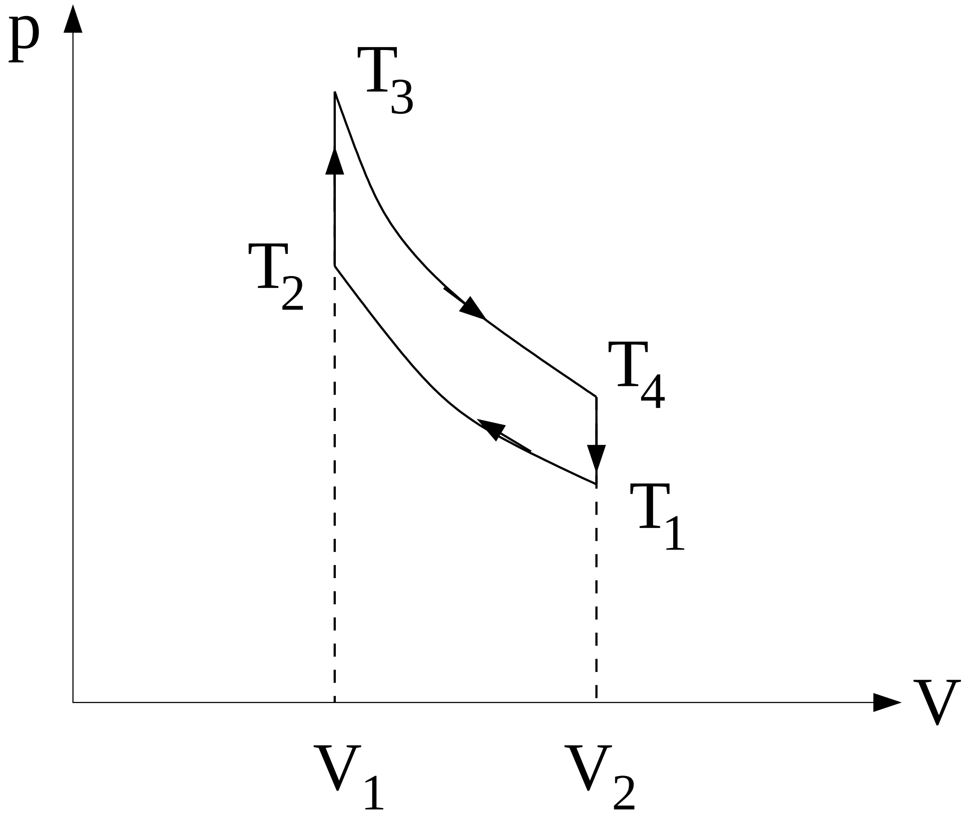
$$W = Q_{23} + Q_{41} = C_V(T_3 - T_2) + C_V(T_1 - T_4) = C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4).$$

C) $C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$

---

g) Gassen utvider seg, så omdanning av varme til arbeid er ikke det eneste som skjer. Derfor er prosessen ikke i strid med 2. lov. B).

Oppgave 2



For å bestemme virkningsgraden trenger vi uttrykk for tilført varme Q_1 ved lav-volum-isokoren V_1 og avgitt varme Q_2 ved høy-volum-isokoren $V_2 = \kappa V_1$. Siden prosessene er isokore, dvs konstant volum, blir de to varmemengdene

$$Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$$

og

$$Q_2 = C_V(T_1 - T_4).$$

Her er T_3 og T_2 hhv høy og lav temperatur for isokoren med volum V_1, mens T_4 og T_1 er høy og lav temperatur for isokoren med volum V_2. Adiabatligningen $TV^{\gamma-1}$ = konstant knytter temperaturene sammen:

$$T_1(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$$

og

$$T_4(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_3 V_1^{\gamma-1}.$$

Virkningsgraden er

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Her kan (f.eks) T_2 og T_3 elimineres via adiabatligningene ovenfor, og vi finner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(T_4 - T_1)(\kappa^{\gamma-1} - 1)}{(T_4 - T_1)\kappa^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \kappa^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

Oppgave 3

For en reversibel kretsprosess vil entropien være uendret. (Hvis prosessen er irreversibel, vil entropien øke.) Varmemengdene Q_3 og Q_1 tilføres systemet hhv ved temperaturene T_3 og T_1. Dernest avgis varmen Q_2 ved omgivelsenes temperatur T_2. Energibevarelse gir

$$Q_2 = Q_1 + Q_3.$$

Uendret entropi innebærer da at

$$0 = \sum_i \Delta S_i = \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2},$$

dvs

$$\frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_1 + Q_3}{T_2},$$

eller

$$Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = Q_3 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right).$$

Maksimal virkningsgrad er derfor

$$\varepsilon_K = \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}.$$

En alternativ framgangsmåte er som følger: Prosessen kan ses på som en Carnotmaskin som opererer mellom temperaturene T_3 og T_2 kombinert med en kjølemaskin som opererer mellom T_1 og T_2. Dermed:

$$\varepsilon_K = \frac{Q_1}{Q_3} = \frac{W}{Q_3} \cdot \frac{Q_1}{W} = \frac{T_3 - T_2}{T_3} \cdot \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1(T_3 - T_2)}{T_3(T_2 - T_1)}.$$

Oppgitte temperaturverdier gir teoretisk virkningsgrad

$$\varepsilon_K = \frac{277 \cdot (373 - 293)}{373 \cdot (293 - 277)} = 3.7.$$

Til sammenligning vil et ideelt Carnot-kjøleskap som opererer mellom temperaturene 277 K (inni kjøleskapet) og 293 K (omgivelsene) ha en virkningsgrad $\varepsilon_K = 277/(293 - 277) = 17$. I praksis vil irreversible prosesser gi betydelig lavere virkningsgrader enn dette.

Kommentar: Kjølemediets temperatur T_1 (når det passerer inni kjølerommet) er nok i virkeligheten en god del lavere enn temperaturen i selve kjølerommet, kanskje ned mot ti kuldegrader eller mer. Dette vil gi en betydelig mindre virkningsgrad enn beregnet ovenfor.