FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.

Løsningsforslag til øving 8

Oppgave 1

Entropiendring for kloss 1:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{đQ}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{C\,dT}{T} = C\,\ln\frac{T_0}{T_1}.$$

Entropiendring for kloss 2:

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_0} \frac{đQ}{T} = \int_{T_2}^{T_0} \frac{C\,dT}{T} = C\,\ln\frac{T_0}{T_2}.$$

Siden total entropi ikke forandrer seg ved reversible prosesser i et termisk isolert system, har vi

$$\Delta S_1 + \Delta S_2 = C(\ln(T_0/T_1) + \ln(T_0/T_2)) = C\ln(T_0^2/T_1T_2) = 0,$$

dvs

$$T_0 = \sqrt{T_1T_2}.$$

Her er altså $\Delta S = 0$, og vi har også $\Delta V = 0$ siden volumutvidelsen kan neglisjeres. Dermed er

$$\Delta G = \Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = C(T_0 - T_1) + C(T_0 - T_2) = C(2T_0 - T_1 - T_2),$$

dvs

$$W_{\text{max}} = -\Delta G = -\Delta U = C(T_1 + T_2 - 2T_0) = C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2}) = C(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2.$$

Med andre ord, alltid *positiv* eksergi (dersom $T_1 \neq T_2$), som ventet. Og likevektstemperaturen er som ventet størst dersom vi ikke tar ut noe energi i form av arbeid:

$$T_0^{(I)} - T_0^{(R)} = \frac{T_1 + T_2}{2} - \sqrt{T_1T_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 > 0.$$

Oppgave 2

a) Maksimalt arbeid er gitt ved

$$W_{\text{max}} = T_0\Delta S - \Delta U - p_0\Delta V = -\Delta G.$$

For ideell gass har vi tidligere vist at

$$S = C_V \ln T + nR\ln V$$

så med $\Delta V = 0$ får en

$$\Delta S = S_0 - S = C_V \ln(T_0/T).$$

For ideell gass er C_V konstant og U er uavhengig av volumet. Dermed er endringen i indre energi

$$\Delta U = U_0 - U = C_V(T_0 - T).$$

Dermed:

$$W_{\text{max}} = C_V(T - T_0) - C_V T_0 \ln(T/T_0).$$

b) For toatomig ideell gass er $C_V = 5nR/2$, dvs $5R/2$ for ett mol gass ($n = 1$). Varme avgitt til omgivelsene blir

$$Q_0 = -Q = -\Delta U - W_{\text{max}} = -T_0\Delta S = C_V T_0 \ln(T/T_0) = 1.47\ \text{kJ}.$$

Maksimalt arbeid:

$$W_{\max} = -\Delta U - Q_0 = 193 \text{ J}.$$

c) Vi kan drive en Carnotmaskin med varmen som trekkes ut av den ideelle gassen. Omgivelsene er da lavtemperaturreservoaret, med fast temperatur T_0, mens den ideelle gassen er høytemperaturreservoaret, med varierende temperatur τ, der τ avtar fra T til T_0. Når gassen avkjøles fra τ til $\tau + d\tau$, avgis varmen $dQ = -C_V d\tau$ til omgivelsene ($d\tau < 0$). Virkningsgraden er $\eta(\tau) = 1 - T_0/\tau$, slik at $dW = (1-T_0/\tau)(-C_V d\tau)$. Utført arbeid blir:

$$W = \int dW = -\int_T^{T_0} (1 - T_0/\tau) C_V d\tau = C_V(T - T_0) - C_V T_0 \ln(T/T_0).$$

d) Ved adiabatisk ekspansjon er $pV^\gamma =$ konstant og $TV^{\gamma-1} =$ konstant (med $\gamma = C_p/C_V$) for ideell gass, og vi har dessuten $pV = nRT$. Dermed:

$$\begin{aligned} W_a &= \int_V^{V_0} p_1 dV_1 = \int_V^{V_0} p(V/V_1)^\gamma dV_1 \\ &= \frac{pV}{\gamma - 1}[-(V_1/V_0)^{\gamma-1} + 1] = \frac{nRT}{\gamma - 1}(-T_0/T + 1) = C_V(T - T_0). \end{aligned}$$

Ved isoterm kompresjon med temperatur T_0 er $pV = p_1V_1 = p_0V_0 = nRT_0$, slik at

$$\begin{aligned} W_i &= \int_{V_0}^{V} p_1 dV_1 = nRT_0 \int_{V_0}^{V} \frac{dV_1}{V_1} \\ &= nRT_0 \ln(V/V_0) = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \ln(V/V_0)^{\gamma-1} = -C_V T_0 \ln(T/T_0). \end{aligned}$$

(Her er V/V_0 skrevet om til $(V/V_0)^{(\gamma-1)/(\gamma-1)}$ i omskrivingen i siste linje, for å kunne innføre T/T_0. Og faktoren $\gamma - 1$ kan skrives som $C_p/C_V - 1 = (C_p - C_V)/C_V = nR/C_V$. Vi ser at summen av W_a og W_i tilsvarer $W_{\max}$.

Oppgave 3

a) Med gass, og arbeid pdv, har vi $df = du - Td\sigma - \sigma dT = -pdv - \sigma dT$, som betyr at $\sigma = -(\partial f/\partial T)_p = +k\partial(T \ln z)/\partial T$. Konstant p i gass-systemet er analogt til konstant magnetfelt h i et magnetisk system, men temperaturen T opptrer på samme vis uansett type system, så uttrykket for entropien σ blir det samme.

b) Den deriverte av $\cosh x$ er $\sinh x$, og $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. Dermed:

$$\begin{aligned} \sigma &= k\frac{\partial}{\partial T}\left[T \ln\left(2\cosh\beta h\right)\right] \\ &= k\left[\ln 2 + \ln\cosh\beta h + T\frac{1}{2\cosh\beta h} \cdot 2\sinh\beta h \cdot (-h/kT^2)\right] \\ &= k\left[\ln 2 + \ln\cosh\beta h - \beta h \tanh\beta h\right]. \end{aligned}$$

Dvs, en funksjon av produktet βh, som antydet i oppgaveteksten. Hvis vi nå spør "hva er σ som funksjon av m og T?" (analogt til $\sigma(V,T)$ i gass-system), innser vi at σ blir en funksjon av kun m, dvs uavhengig av T, siden $m = m(\beta h)$. For å bestemme funksjonen $\sigma(m)$ må vi invertere $m(\beta h)$, dvs bestemme funksjonen $y(m)$, med $y \equiv \beta h$. Vi har $\tanh x = (z - 1/z)/(z + 1/z) = (z^2 - 1)/(z^2 + 1)$, der vi har innført $z = e^x$. Dermed:

$$m = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

$$
\begin{aligned}
(z^2+1)m &= z^2-1 \\
z^2 &= \frac{1+m}{1-m} \\
x &= \beta h = \ln\sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+m}{1-m}.
\end{aligned}
$$

Vi trenger også $\cosh x$ uttrykt ved m:

$$
\begin{aligned}
m &= \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} \\
\Rightarrow m^2\cosh^2 x &= \cosh^2 x - 1 \\
\Rightarrow \cosh x &= \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}.
\end{aligned}
$$

Dermed:

$$
\begin{aligned}
\sigma &= k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+m) - \frac{1}{2}\ln(1-m) - \frac{1}{2}m\ln(1+m) + \frac{1}{2}m\ln(1-m)\right] \\
&= k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right],
\end{aligned}
$$

som vi skulle vise.

c) Antall mikrotilstander W i et system med i alt N spinn og et antall N_+ spinn som peker med magnetfeltet og et antall N_- spinn som peker mot magnetfeltet, må være bestemt ved hvor mange ulike måter vi kan "trekke" N_+ med spinn "opp" og N_- med spinn "ned", dvs

$$
W = \frac{N!}{N_+!N_-!}.
$$

Og vi har sammenhengene $N = N_+ + N_-$ og $Nm = N_+ - N_-$, som gir

$$
N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N.
$$

Med Boltzmanns prinsipp blir entropien følgelig

$$
\begin{aligned}
S &= k\ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) \\
&= k(N\ln N - N - (N_+\ln N_+ - N_+) - (N_-\ln N_- - N_-)) \\
&= k(-N_+\ln\frac{N_+}{N} - N_-\ln\frac{N_-}{N}) \\
&= kN(-\frac{1}{2}(1+m)\ln((1+m)/2) - \frac{1}{2}(1-m)\ln((1-m)/2)) \\
&= Nk\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right],
\end{aligned}
$$

dvs det samme som funnet i punkt *b*.

[Spesialtilfeller: Hvis T er forskjellig fra null, vil $h = 0$ gi $m = 0$, som er rimelig: Like stor sjanse for spinn opp og spinn ned, og i middel null magnetisk moment pr spinn. Uttrykket for σ gir $\sigma(0) = k\ln 2$, som er rimelig: Med $h = 0$ er det $W = 2$ like sannsynlige mikrotilstander pr spinn. Den andre ytterlighet er at $\beta h \gg 1$ (evt $\beta h \ll -1$), dvs magnetfeltet er så sterkt at alle spinn foretrekker å ligge i samme retning som det påtrykte feltet. Da blir $m = \tanh\beta h \simeq 1$ (evt $m \simeq -1$ hvis $h < 0$), og entropien blir $\sigma(1) = k(\ln 2 - (1/2)\cdot 2\ln 2 - (1/2)\cdot 0) = 0$. (Det siste leddet i parentesen blir null fordi x går raskere mot null enn $\ln x$ går mot minus uendelig når x går mot null.) Igjen et rimelig resultat: Med alle spinn i samme retning er det kun $W = 1$ mikrotilstand som er mulig.]

d) Når magnetfeltet h skrus på isotermt, vil magnetiseringen $m = \tanh \beta h$ øke. Når så magnetfeltet slås av igjen, uten termisk kobling til omgivelsene, vil systemets entropi ikke endre seg, ettersom σ bare avhenger av m. Uendret magnetisering, $m_1 = m_2$ betyr $\tanh \beta_1 h_1 = \tanh \beta_2 h_2$, og dermed $\beta_1 h_1 = \beta_2 h_2$, eller

$$T_1 = T_2 h_1/h_2 < T_2.$$

For en ideell paramagnet (dvs ingen vekselvirkning mellom nabospinn) vil $T_1 \to 0$ når $h_1 \to 0$. I praksis vil det være en viss vekselvirkning mellom nabospinn, slik at et gitt spinn vil erfare et magnetfelt $B \neq 0$ selv om det ytre feltet skrus helt av.