

Oppgave 1

a) La oss ta det enkleste først: Siden v_x^3 er en antisymmetrisk (odde) funksjon av v_x og $g(v_x)$ er en symmetrisk (like) funksjon av v_x , må integralet av produktet av disse to fra $-\infty$ til ∞ bli lik null. Videre er (med $b = m/2k_B T$ som i forelesningene):

$$\begin{aligned}\langle |v_x| \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |v_x| g(v_x) dv_x = 2 \int_0^{\infty} v_x g(v_x) dv_x \\ &= 2 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_0^{\infty} v_x e^{-mv_x^2/2k_B T} dv_x \\ &= \sqrt{\frac{2m}{\pi k_B T}} \cdot \frac{k_B T}{m} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \simeq 0.80 \sqrt{\frac{k_B T}{m}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_x^4 \rangle &= \sqrt{\frac{b}{\pi}} \left(-\frac{d}{db} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{b}} \\ &= \sqrt{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot b^{-5/2} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{m}{2k_B T} \right)^{-2} = 3 \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2\end{aligned}$$

Med andre ord, $\langle v_x^4 \rangle^{1/4} \simeq 1.32 \sqrt{k_B T/m}$.

b) Vi har fartsfordelingen $f(v)$ fra forelesningene, slik at

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle &= \int_0^{\infty} \frac{1}{v} f(v) dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v e^{-mv^2/2k_B T} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot \frac{k_B T}{m} \\ &= \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{k_B T/m}} \\ &\simeq \frac{0.80}{\sqrt{k_B T/m}}\end{aligned}$$

Til sammenligning er

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

(fra forelesningene), slik at

$$\frac{1}{\langle v \rangle} \simeq \frac{0.63}{\sqrt{k_B T/m}}.$$

Oppgave 2

a) Fra forelesningene har vi $\langle v^2 \rangle = 3k_B T / m_{\text{molekyl}} = 3RT/M$, der R er gasskonstanten og M er molekylens molare masse. Denne bør i følge oppgaven være mindre enn $V^2/36 = Gm/18r$, dvs

$$\frac{3RT}{M} < \frac{Gm}{18r} \Rightarrow T < \frac{GMm}{54Rr},$$

hvis vi på lang sikt skal unngå at molekylene forsvinner helt fra atmosfæren.

b) Jordas masse er $6.0 \cdot 10^{24}$ kg og dens radius er $6.4 \cdot 10^6$ m. Hydrogen, med molar masse 2 g, kunne derfor tenkes å finnes i jordas atmosfære dersom jordas overflatetemperatur var mindre enn ca 280 K. I gjennomsnitt er den litt høyere enn dette, ca 290 K, så vi kan ikke forvente å finne særlig mye hydrogen i vår atmosfære, konsistent med de faktiske forhold. Nitrogen og oksygen, derimot, har hhv 14 og 16 ganger større molar masse enn hydrogen, noe som gir en tilsvarende høyere toleranse for overflatetemperaturen, hhv 3900 K og 4460 K. Med andre ord, ingen overraskelse at både N_2 og O_2 har holdt seg på plass her nede.

For Jupiter er masse og radius hhv $1.9 \cdot 10^{27}$ kg og $7.2 \cdot 10^7$ m. Dette gir mulighet for hydrogen i atmosfæren med overflatetemperatur opp mot 8000 K. I virkeligheten er den ikke mer enn i overkant av 120 K, så det er fullt mulig med hydrogen på Jupiter. Jupiters atmosfære inneholder da også omlag 90% hydrogen.

Vår måne har masse og radius hhv $7.4 \cdot 10^{22}$ kg og $1.7 \cdot 10^6$ m. En atmosfære med nitrogen ville dermed fordre en overflatetemperatur mindre enn 177 K. I realiteten kommer temperaturen ved månens ekvator opp mot 400 K (på solsiden, selvsagt), konsistent med at månen praktisk talt ikke har noen atmosfære.

Oppgave 3

Inversjonskurven er definert ved $\mu_{JT} = 0$, dvs ved $T(\partial V / \partial T)_p - V = 0$ eller $(\partial T / \partial V)_p = T/V$. Fra van der Waals tilstandsligning (med $n = 1$ mol) har vi

$$T = (1/R)(p + a/V^2)(V - b),$$

slik at

$$(\partial T / \partial V)_p = (1/R)(RT/(V - b) - 2a(V - b)/V^3),$$

som skal være lik T/V . Det gir, løst mhp V og etter litt omskriving,

$$V = b/(1 - \sqrt{RbT/2a}),$$

som innsatt i tilstandsligningen til slutt gir

$$p = \frac{a}{b^2} \left(-3T/T_0 + 4\sqrt{T/T_0} - 1 \right)$$

der $T_0 = 2a/Rb$.

Oppgave 4.

a) Argon er en enatomig gass (dvs enkeltatomer) med atomdiameter ca 0.38 nm. Hvor stor andel av tilgjengelig volum okkuperer da argonatomene ved romtemperatur (300 K) og trykk 10^{-3} Pa (et ikke unormalt

trykk i et elektronmikroskop, og blant folk som driver med overflatefysikk – se siste side)? (Det oppgis at kuler har volum $4\pi r^3/3$.)

Tilgjengelig volum pr atom:

$$k_B T/p = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/10^{-3} = 4.14 \cdot 10^{-18} \text{ m}^3.$$

Okkupert volum pr atom:

$$(4\pi/3) \cdot (0.38 \cdot 10^{-9}/2)^3 = 2.87 \cdot 10^{-29} \text{ m}^3.$$

Volumandel okkupert:

$$(2.87 \cdot 10^{-29})/(4.14 \cdot 10^{-18}) \simeq 7 \cdot 10^{-12}.$$

C) $7 \cdot 10^{-12}$

b) Argon har atomnummer 18, og i tillegg til de 18 protonene er det 22 nøytroner i atomkjernen. (Den mest vanlige isotopen, som utgjør ca 99.6%.) Hva blir da (omtrent) midlere partikkelhastighet $\langle v \rangle$ i en argongass ved termodynamiske betingelser som i oppgave a?

Fra kinetisk gassteori er $\langle K \rangle = 3k_B T/2$, slik at

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

Her er $m = 40u = 40 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \simeq 6.7 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, så ved 300 K blir $v_{\text{rms}} \simeq 430 \text{ m/s}$. Andre tallfaktorer enn $\sqrt{3}$, av størrelsesorden 1, gir hastigheter som uansett ikke gir grunnlag for annet enn alternativ B.

B) 400 m/s

c) Hydrogenmolekylet, H_2 , har mulige ("tillatte") rotasjonsenergier

$$K_{\text{rot}}^{(l)} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_0} \quad , \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Her er $\hbar = h/2\pi \simeq 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (h = Plancks konstant), og $I_0 = md^2/2$ er molekylets treghetsmoment med hensyn på akser som står normalt på molekylets sylindersymmetriakse, og som passerer gjennom molekylets massesenter. For hydrogenmolekylet er $\hbar^2/I_0 \simeq 15 \text{ meV}$. Det oppgis dessuten at $k_B \simeq 0.086 \text{ meV/K}$. La π_l være sannsynligheten for at et gitt molekyl er i "rotasjonstilstand" l , med rotasjonsenergi $K_{\text{rot}}^{(l)}$. Hva er da forholdet π_1/π_0 ved temperatur 77 K (flytende nitrogen)?

I hver enkelt sannsynlighet π_l inngår den inverse partisjonsfunksjonen, men i forholdet mellom to sannsynligheter kanselleres denne bort:

$$\begin{aligned} \pi_1/\pi_0 &= \exp\left(-\frac{\hbar^2/I_0}{k_B T}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{15}{0.086 \cdot 77}\right) \simeq \exp(-2.265) \simeq 0.1 \end{aligned}$$

Dette indikerer at rotasjonsfrihetsgradene i hydrogenmolekylet begynner å våkne til liv ved omtrent denne temperaturen.

B) ca 0.1
