

TFY4215 Innføring i kvantefysikk Løsningsforslag 9. august 2023

1A) $x = 2\pi \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 58.76 \cdot 10^9 / 1.38 \cdot 10^{-23} = 2.821 \simeq 2.8$

2B) $x_1 = 1.89636 \simeq 1.9$, $x_2 = 2.54966 \simeq 2.5$, $x_3 = 2.76568 \simeq 2.8$, $x_4 = 2.81120 \simeq 2.8$. Vi ser at 3 beregninger av høyre side gir x med 2 gjeldende sifre.

3F) $P = j \cdot A = \sigma T^4 \cdot A$. Med $A = \pi d^2 = \pi \cdot 0.01 \text{ m}^2$ og $T = 373.15 \text{ K}$ blir $P = 35 \text{ W}$.

4E) Ikke-relativistisk: $K_{\text{kl}} = mv^2/2 = mc^2/8 = 0.125mc^2$. Relativistisk: $K_{\text{rel}} = (\gamma - 1)mc^2$. Her er $\gamma = 2/\sqrt{3}$ slik at $K_{\text{rel}} = 0.155mc^2$. Feilen blir $(0.155 - 0.125)mc^2 = 0.030mc^2$.

5C) $E_1 = K_1 = \hbar^2/2m_e\lambda_1^2$ kombinert med $E_1 = \pi^2\hbar^2/2m_eL^2$ gir $\lambda_1 = 2L = 48 \text{ \AA}$. Eller uten regning: En stående bølge uten nullpunkter.

6D) $\lambda = hc/(E_2 - E_1) = 8m_e c L^2 / 3h = 6.4 \mu\text{m}$

7D) $P_1 = |c_1|^2$ med $c_1 = (\sqrt{2}/L) \int_0^L \sin(\pi x/L) dx = 2\sqrt{2}/\pi$. Dermed: $P_1 = 8/\pi^2 = 0.81$

8C) $P_1 = |c_1|^2$ med $c_1 = (\sqrt{2}/L) \int_0^L \sin(\pi x/L) i \sin(\pi x/L) dx = (i\sqrt{2}/\pi) \int_0^\pi \sin^2 z dz = (i\sqrt{2}/\pi) \cdot (\pi/2) = i/\sqrt{2}$. Dermed: $P_1 = 1/2$.

Her kunne vi se bort fra realdelen av $\Psi(x, 0)$ ettersom denne gir en antisymmetrisk integrand på intervallet $0 < x < L$.

9A) Mulige energimålinger er $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2m_eL^2) = n^2 \cdot 64.8 \text{ meV}$. Sannsynligheten for å måle energi større enn 0.3 eV er derfor $1 - |c_1|^2 - |c_2|^2$. Her er $c_1 = 3\sqrt{10}/\pi^2$ og $c_2 = 3\sqrt{10}/(4\pi^2)$ slik at $|c_1|^2 = 0.924$ og $|c_2|^2 = 0.058$. Svaret blir dermed 0.018 , dvs 1.8% .

10E) $E_1 = (3/2)\hbar\omega = (3/2)\hbar\sqrt{k/m}$ slik at de klassiske vendepunktene i første eksiterte tilstand ψ_1 , bestemt av $E_1 = kx_1^2/2$, blir $x_1 = \pm\sqrt{3\hbar/\sqrt{k} \cdot m} = \pm\sqrt{3 \cdot 1.05 \cdot 10^{-34} / \sqrt{1860 \cdot 6.86 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}} = \pm 8.3 \text{ pm}$. Dermed er maksimalt klassisk utsving fra likevekt 8.3 pm .

11C) $\nu = \sqrt{k/m}/(2\pi) = \sqrt{1860/(6.86 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27})}/(2\pi) \text{ Hz} = 64.3 \text{ THz}$

12B) $\exp(\hbar\omega/k_B T) = \exp(1.05 \cdot 10^{-34} \cdot 4.0415 \cdot 10^{14} / 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 77) = 2.2 \cdot 10^{17}$. Her brukte vi $\omega = \sqrt{k/m} = 4.0415 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

13B) Med $\exp(-x/\xi) \simeq 1 - x/\xi$ blir $V_M(x) \simeq V_0 x^2/\xi^2$, og når dette settes lik $V(x) = kx^2/2$, finner vi at $V_0/\xi^2 = k/2$, og dermed $\xi = \sqrt{2V_0/k} = \sqrt{2 \cdot 11.1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} / 1860} = 43.7 \text{ pm}$

14B) Massesenteret ligger i avstand $143 \cdot 3/7 \text{ pm}$ fra O-atomet og i avstand $143 \cdot 4/7 \text{ pm}$ fra C-atomet. Trehetsmomentet I_0 mhp en akse gjennom massesenteret er dermed

$$I_0 = 16 \cdot (0.143 \cdot 3/7)^2 + 12 \cdot (0.143 \cdot 4/7)^2 = 0.14,$$

i enheten $u \text{ nm}^2$. Det tilsvarer $I_0 = 2.32768 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2$. Dermed:

$$\Delta E_{21} = 2\hbar^2/I_0 = 0.59 \text{ meV}.$$

15E) Pga 11 nullpunkter er dette 11. eksiterte tilstand. Dermed i alt 12 bundne tilstander.

16A) Kinetisk energi i grunntilstanden er litt mindre enn hvis dette hadde vært en uendelig dyp potensialbrønn (partikkel i boks). For elektron i boks: $K_1 = \pi^2 \hbar^2 / 2m_e L^2$, som med $L = 4$ nm er 23 meV. Da må 21 meV være rett svar her.

17D) $\kappa = \sqrt{2m_e(V - E)}/\hbar$ som med $V = 0$ og $E = -115$ meV gir $\kappa = 1.74$ pr nm.

18D) $N = n_x + n_y = 10$ med mulige kombinasjoner $(n_x, n_y) = (0, 10), (1, 9), \dots, (10, 0)$, dvs 11 mulige kombinasjoner.

19F) Vi finner egenfunksjonene $\psi_{n_x}(x)$ og dermed $\psi_{n_y}(y)$ i formelvedlegget. Siden $x = r \cos \phi$ og $y = r \sin \phi$ i polarkoordinater, blir $\psi_{11} = R(r) \cos \phi \sin \phi$, dvs $\psi_{11} \sim \sin 2\phi$. Med bevegelse i xy -planet har dreieimpulsen bare en z -komponent, slik at

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

som gir

$$\hat{L}^2 \psi_{11} = 4\hbar^2 \psi_{11},$$

dvs $L^2 = 4\hbar^2$.

20C) Operatoren $\hat{L}_z$ inneholder en gangs derivasjon mhp ϕ . Dermed er $\psi_{11} \sim \sin 2\phi$ ikke egenfunksjon til $\hat{L}_z$, dvs L_z er uskarp.

21A) Med $x = r \cos \phi$ og $y = r \sin \phi$ blir $\psi_{11} = f(r) \sin \phi \cos \phi = \frac{1}{2} f(r) \sin 2\phi$. Da har vi

$$\langle L_z \rangle = \int \psi_{11}^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_{11} d^2 r \sim \int_0^{2\pi} \sin 2\phi \cos 2\phi d\phi = 0.$$

22B) Egenfunksjoner til $\hat{L}_z$ er $\exp(im\phi)$, med heltallig m . For å oppnå $L_z = 0$, må vi ha $m = 0$. Siden ψ_{00} er uavhengig av ϕ , passer denne bra.

23B) To partikler i ψ_{00} , ψ_{10} , ψ_{01} , samt en partikkel i enten ψ_{11} , ψ_{20} eller ψ_{02} . Total energi: $(2 + 4 + 4 + 3)\hbar\omega = 13\hbar\omega$.

24A) Når $n_x^2 + n_y^2 = 18$, er de to kvantetallene 3 og 3. Dette kan oppnås på kun en måte. Med spinndegenerasjon 2 blir total degenerasjonsgrad 2.

25C) Kvantetall 2 og 3 gir energi $13E_0$. De andre er ikke mulige.

26D) $E = E_0 \cdot (2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 8) = 32E_0$. Og her er $E_0 = \hbar^2 \pi^2 / 2m_e L^2 = 14.93$ meV slik at $E = 478$ meV.

27A) $|\psi_{200}|^2$ avhenger av $x = r/a_0$ som $(1 - x/2)^2 \exp(-x)$. Denne funksjonen er maksimal i origo.

28C) Med $l = 0$ er $L = 0$.

29E) $\lambda = hc/\Delta E$ med $\Delta E = (1/4 - 1/16) \cdot 13.6 \text{ eV}$ gir $\lambda = 485 \text{ nm}$.

30A) $E < V_0$ gir $T = 0$.

31F) $E = 3V_0/2$ betyr at $q/k = 1/\sqrt{3}$ og $R = (1 - 1/\sqrt{3})^2 / (1 + 1/\sqrt{3})^2 = 0.07$, slik at $T = 1 - R = 0.93$.

32E) En rask opptelling avslører 15 nullpunkter, dvs $\psi_{15}(z)$, tilstanden midt i bånd nr 2. Da passer -262 meV best.

33B) $\lambda = hc/E$ med $E \simeq -214 + 290 = 76 \text{ meV}$ gir $\lambda \simeq 16 \mu\text{m}$

34A) Siden $\hat{p}_z$ inneholder derivert mhp z , kommuterer den med y .

35A) Siden $\hat{L}_x$ inneholder y og z , men ikke x , kommuterer den med $\hat{p}_x$.

36D) $A^2 \cdot (6^2 + 7^2) = 1$ gir $A = 1/\sqrt{85}$

37E) Dette er ikke en egentilstand til $\hat{S}_y$. Dermed er S_y uskarp.

38E) Dette er ikke en egentilstand til $\hat{S}_x$. Dermed er S_x uskarp.

39D) Dette er en egentilstand til $\hat{S}_z$ med egenverdi $-\hbar/2$.

40C) Det var Gerlach og Stern som sendte resultatet av sitt eksperiment med sølvatomer til Niels Bohr i form av dette postkortet i februar 1922.