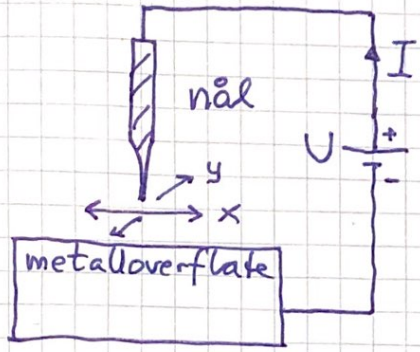
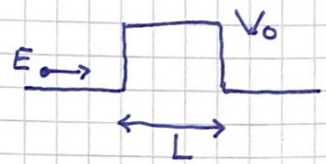
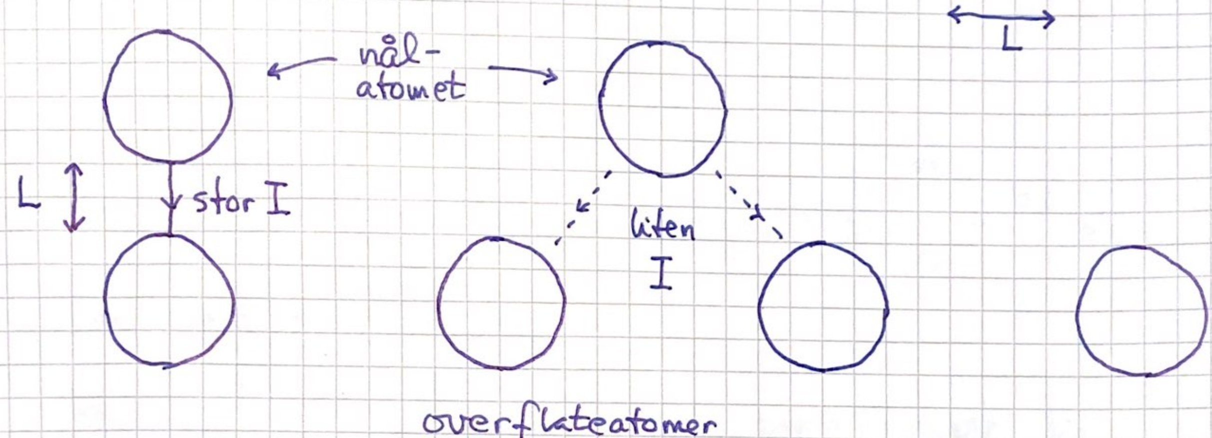
STM (Scanning Tunneling Microscope)



Nål med <u>ett</u> atom ytterst på spissen scannes i (xy)-planet nær metalloverflaten; strømmen $I(x,y)$ måles.



På atomær skala:



$$I \sim T \sim \exp(-2\varkappa L) \qquad \left(\varkappa = \sqrt{2m(V_0-E)}/\hbar\right)$$

$\Rightarrow$ $I(x,y)$ gir avbildning av overflaten med atomær oppløsning.

- NP 1986: Binnig og Rohrer, IBM (Zürich)
- Youtube: A boy and his atom
  Moving Atoms:
  Making the world's smallest movie

Diracs deltafunksjon

[PCH 3.4, App B ; DJG 2.5 ; IØ 3.3, 2.4.f]

Def. av $\delta(x)$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$; $f(x)$ kontinuerlig i $x=0$

Noen egenskaper (se f.eks. s. 58–60 H2020 for endel bevis):

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$
- $\delta(x) = 0$ for $x \neq 0$; $\delta(0) = \infty$
- $\delta(-x) = \delta(x)$
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\cdot\delta(x)$

Fourier-representasjon: $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk$

Deltafunksjonsnormering:

Med $\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ikx}$ for plane bølger blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^*(x)\,\psi_{k'}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k'-k)x}\,dx = \delta(k'-k) = \delta(k-k')$$

Evt. med $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{ipx/\hbar}$:

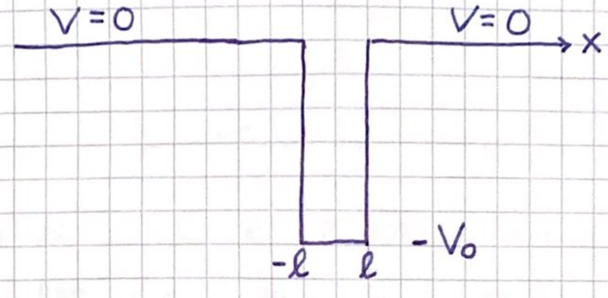
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{p'}^*(x)\,\psi_p(x)\,dx = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x/\hbar}\,dx$$

$$= \frac{1}{\hbar}\,\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right)$$

$$= \delta(p-p')$$

Eksempler med δ-funksjonspotensial:

Eks 1: δ-funksjonsbrønn



$V_0 \to \infty$ og $\ell \to 0$
slik at $\beta = 2\ell \cdot V_0$
er endelig;
$\Rightarrow V(x) = -\beta \cdot \delta(x)$

Har vi bundne filstander, med $E < 0$?

$x \neq 0$: Da er $V = 0$ og $\psi''(x) = \kappa^2 \psi(x)$
med $\kappa^2 = -2mE/\hbar^2 = 2m|E|/\hbar^2 > 0$
og løsning $\psi(x) = C \cdot \exp(\mp \kappa x)$ for $x \gtrless 0$;
dvs $\psi(0) = C$. Som ventet er $\psi(x)$ kont.
i $x = 0$, mens $\psi'(x)$ gjør et sprang i $x = 0$.

Vi kan bestemme κ, og dermed E, ved å integrere TUSL forbi $x = 0$, dvs fra $-\varepsilon$ til $+\varepsilon$, med $\varepsilon \to 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \beta\,\delta(x)\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\psi' = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\delta(x)\psi - \frac{2m}{\hbar^2}E\psi$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d}{dx}\psi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(x)\psi(x)\,dx + 0$$

$$\Rightarrow \psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(0)$$

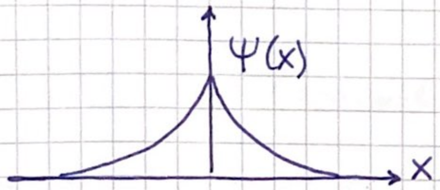
$$\Rightarrow -\kappa C - \kappa C = -\frac{2m\beta}{\hbar^2}\cdot C$$

$$\Rightarrow \kappa = m\beta/\hbar^2$$

$$\Rightarrow E = -\hbar^2\kappa^2/2m = -m\beta^2/2\hbar^2$$

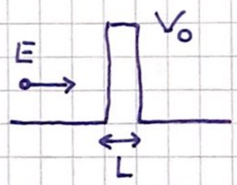
Dvs, 1 bundet tilstand. Normering av $\psi(x)$ gir

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{m\beta}}{\hbar} \cdot \exp\left(-m\beta|x|/\hbar^2\right)$$

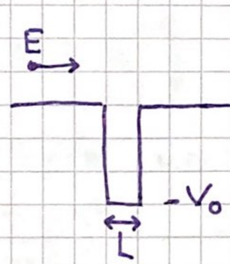


Alle $E > 0$ er tillatt, dvs kont. spektrum av ubundne tilstander, som med endelig potensialbrønn.

Eks 2: Kollisjon med δ-barriere og δ-brønn; $T(E) = ?$



evt.



$E = \hbar^2 k^2/2m$

$$V(x) = \pm\beta\delta(x)$$
$$\beta = V_0 \cdot L$$
$$V_0 \to \infty, \quad L \to 0$$

$x < 0$: $\psi = e^{ikx} + r e^{-ikx}$; $\psi' = ik\left(e^{ikx} - r e^{-ikx}\right)$

$x > 0$: $\psi = t e^{ikx}$; $\psi' = ikt e^{ikx}$

$$\psi(0^+) = \psi(0^-) \quad \Rightarrow \quad t = 1 + r$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \pm \frac{2m\beta}{\hbar^2}\psi(0) \qquad \text{(se s. 72)}$$

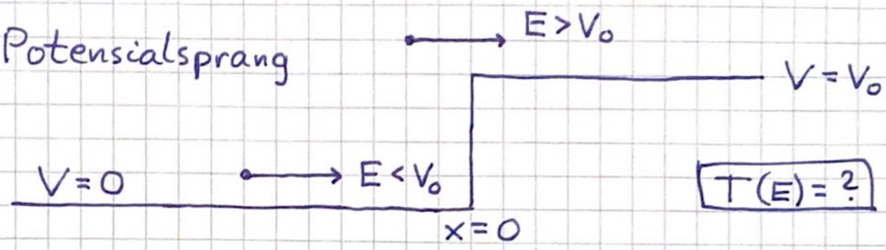
$$\Rightarrow ikt - ik\underbrace{(1-r)}_{=2-t} = \pm(2m\beta/\hbar^2)\cdot t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2ik}{2ik \pm 2m\beta/\hbar^2} = \frac{1}{1 \pm m\beta/ik\hbar^2}$$

$$\Rightarrow T(E) = |t|^2 = \left[1 + m\beta^2/2E\hbar^2\right]^{-1};$$

like stor for barriere og brønn!

Eks: Potensialsprang



Hvis $E < V_0$, er åpenbart $R=1$ og $T=0$.

Med $E > V_0$:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r\, e^{-ikx} & ; \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad (x<0) \\ t\, e^{iqx} & ; \quad q^2 = 2m(E-V_0)/\hbar^2 \qquad (x>0) \end{cases}$$

ψ og ψ' er kont. i $x=0$: $1+r = t$; $ik(1-r) = iqt$

$$\Rightarrow r = \frac{k-q}{k+q} \quad ; \quad t = \frac{2k}{k+q}$$

Her er $j_t = |t|^2 \cdot \hbar q/m$ mens j_i og j_r er som før

$$\Rightarrow R = |r|^2 = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2 \quad ; \quad T = |t|^2 \cdot \frac{q}{k} = \frac{4kq}{(k+q)^2}$$

Som bølge på streng med skjøt i $x=0$!

Siden R og T er uendret ved ombytte $k \leftrightarrow q$, fås samme resultat for potensialsprang ned: