Plancks strålingslov

[PCH 1.2 ; DJG 5.4.5 ; IØ 1.1] [Øving 1]

Plancks kvantehypotese (1900, NP 1918) :

EM-stråling med frekvens ν har kvantisert energi

$$\boxed{E_n = n \cdot h\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

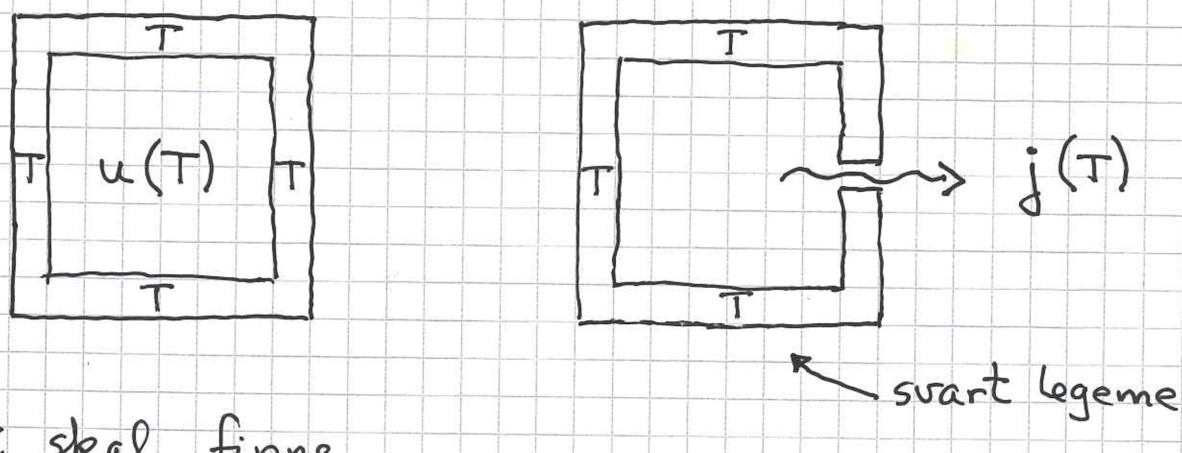
med $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js (for å få samsvar med eksperimenter)

I dag : n = antall fotoner med frekvens ν

["photon" : Gilbert N. Lewis, 1926]

Etter 20.05.19 : $h \equiv 6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant

Ser på metallboks med hulrom, i termisk likevekt :



Vi skal finne

$u(T)$ = strålingsenergi pr volumenhet i hulrommet

$j(T)$ = utstrålt effekt pr flateenhet gjennom en liten åpning i veggen

Vi skal også finne ut hvordan u og j er <u>fordelt</u> over ulike frekvenser ν og bølgelengder λ $(= c/\nu)$:

$$u(T) = \int du = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu} = \int_0^\infty d\lambda \, \frac{du}{d\lambda}$$

med

$\frac{du}{d\nu}$ = hulromsenergi pr volumenhet og frekvensenhet

$\frac{du}{d\lambda}$ = ——————— " ——————— bølgelengdeenhet

Og tilsvarende for utstrålt energi fra <u>svart legeme</u> [pr def: legeme som absorberer all innkommende stråling; med termisk likevekt (konstant temperatur T) må legemet emittere like mye strålingsenergi som det absorberer; i motsatt fall vil temperaturen <u>ikke</u> holde seg konstant]:

$$j(T) = \int dj = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dj}{d\nu} = \int_0^\infty d\lambda \, \frac{dj}{d\lambda}$$

Vi skal – etter betydelig strev – finne at

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3 / c^2}{\exp(h\nu / k_B T) - 1}$$

som er Plancks strålingslov, med

$c \equiv 299\,792\,458$ m/s = lysfarten (i vakuum)

$k_B \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K = Boltzmanns konstant

Vi kan skrive

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{d(U/V)}{d\nu} = \frac{1}{V}\,\frac{\langle E\rangle\, dN}{d\nu}$$

der

$V = L^3 =$ hulrommets volum

$\langle E\rangle =$ midlere energi pr svingemode (svingetilstand)

$dN =$ antall svingemoder mellom ν og $\nu + d\nu$

$\Rightarrow \dfrac{dN}{d\nu} =$ antall svingemoder pr frekvensenhet

$=$ modetettheten (evt. tilstandstettheten)

Svingemodene er EM-bølger som oppfyller Maxwells ligninger, i hulrommet og i metallveggene, inkludert grensebetingelser for feltene $\vec{\mathcal{E}}$ og $\vec{B}$ på alle 6 metallvegger, i $x, y, z = 0$ og L; f.eks. $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ i hulrommet og $\mathcal{E}_{\parallel} = 0$ på veggene.

$\Rightarrow$ Stående bølger $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_x \hat{x} + \mathcal{E}_y \hat{y} + \mathcal{E}_z \hat{z}$ med komponenter på formen

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{0x} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$

Ser direkte at $\vec{\mathcal{E}}_{\parallel} = 0$ på de 3 veggene ved $x = 0$, $y = 0$ eller $z = 0$.

Må ha $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$ ved $z = L$

$\Rightarrow \sin(k_z L) = 0 \quad \Rightarrow k_z = \frac{n_z \pi}{L} \quad ; \quad n_z = 0, 1, 2, \ldots$

Tilsvarende er $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0$ ved $y = L$ og

$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0$ ved $x = L$

$\Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{L}$ og $k_y = \frac{n_y \pi}{L} \quad ; \quad n_x, n_y = 0, 1, 2, \ldots$

Men: Bare inntil en $n_j = 0$; hvis ikke blir $\vec{\mathcal{E}} = 0$ overalt.

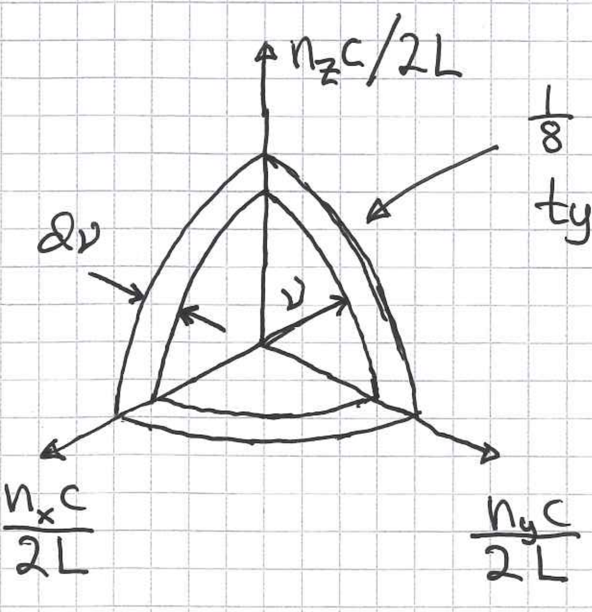
Dermed:

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi / k = 2L / \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\nu = c/\lambda = ck/2\pi = \frac{c}{2L} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Dvs: Mulige frekvenser ν tilsvarer punkter i den positive oktanten av et rom utspent av aksene $n_x c/2L$, $n_y c/2L$ og $n_z c/2L$:



$\frac{1}{8}$ av et kuleskall med radius ν, tykkelse $d\nu$, og dermed volum

$$dV_\nu = \frac{1}{8} \cdot 4\pi \nu^2 \cdot d\nu = \frac{\pi}{2} \nu^2 d\nu$$

Hver frekvens okkuperer et volum $\left(\frac{c}{2L}\right)^3$ i dette frekvensrommet, siden det er en "lengde" $c/2L$ til "nabofrekvensene", i alle tre retninger.

For hver frekvensverdi har vi 2 tilstander, siden $\vec{E}$ har 2 uavhengige polarisasjonsretninger.

Dvs, 2 tilstander pr volum $(c/2L)^3$:

$$\frac{dN}{dV_\nu} = \frac{2}{(c/2L)^3} = \frac{16V}{c^3}$$

Som kombinert med $dV_\nu = \frac{\pi}{2}\nu^2 d\nu$ gir

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{16V}{c^3} \cdot \frac{\pi}{2}\nu^2 = \frac{8\pi\nu^2 V}{c^3}$$

Dermed:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{V}\frac{\langle E\rangle dN}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\langle E\rangle$$

Vi ser at antall tilstander pr frekvens- og volumenhet, $\frac{dN}{V\cdot d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$, er uavhengig av den valgte geometrien (kubisk boks, $V = L^3$), som ventet.

Merk: Denne "tellingen av tilstander" har intet med kvantemekanikk å gjøre, like lite som f.eks. stående bølger på en gitarstreng.

Midlere energi $\langle E \rangle$ pr svingemode:

Først med <u>klassisk</u> fysikk!

Fra elmag: $u = u_{\mathcal{E}} + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Ekvipartisjonsprinsippet:

Hver frihetsgrad som bidrar kvadratisk i energifunksjonen, gir et bidrag $\frac{1}{2} k_B T$ til midlere energi (pr partikkel evt. pr svingemode, alt ettersom).

Her: 2 kvadratiske bidrag pr svingemode

$$\Rightarrow \langle E \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T$$

Dette er Rayleigh-Jeans lov. Stemmer bra med målinger for lave frekvenser (lange bølgelengder), men gir en ufysisk divergent total energitetthet

$$u(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu} = \infty,$$

den såkalte ultrafiolett-katastrofen.

$(du/d\nu \to \infty$ når $\nu \to \infty$, evt. $\lambda \to 0)$

Ekvipartisjonsprinsippet følger av et sentralt resultat i statistisk mekanikk:

Anta at partikler, eller svingemoder, i et system ved temperatur T kan ha alle mulige verdier E for et eller annet bidrag til systemets energi, og at E er kvadratisk i en av systemets frihetsgrader s, dvs på formen

$$E(s) = A \cdot s^2 \qquad (\text{med } A = \text{konstant})$$

[F.eks: Kinetisk energi K for ~~molekyl~~ atom med masse m i en gass, $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$, dvs 3 kvadratiske bidrag.]

Da er <u>sannsynligheten</u> for å måle en verdi av E mellom $E(s)$ og $E(s+ds)$ proporsjonal med <u>Boltzmann-faktoren</u>

$$\exp\left(-E(s)/k_B T\right)$$

mer presist

$$dP = C \cdot \exp\left(-E(s)/k_B T\right) ds$$

En måling av E vil gi en eller annen verdi, helt sikkert, dvs sannsynlighetsfordelingen må være <u>normert</u>:

$$\int dP = 1$$

Anta $E(s) = A \cdot s^2$, og at s kan ha alle mulige verdier, dvs $-\infty < s < \infty$. Da er:

$$C \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-As^2/k_BT)\, ds = 1$$

Sett $x = s \cdot \sqrt{A/k_BT}$, da er $ds = dx \cdot \sqrt{k_BT/A}$, slik at

$$C \cdot \sqrt{k_BT/A} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\, dx = 1$$

Integralet er $\sqrt{\pi}$:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\Rightarrow I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2+y^2))\, dx\, dy$$

Med polarkoordinater : $x^2+y^2 = r^2$; $dx\,dy = dA = dr \cdot r\, d\varphi$

$$\Rightarrow I_0^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = 2\pi \cdot \Big|_0^{\infty} \left(-\tfrac{1}{2} e^{-r^2}\right) = \pi$$

$$\Rightarrow I_0 = \sqrt{\pi}$$

Dermed: $\quad C = \sqrt{A/\pi k_BT}$

Midlere energibidrag :

$$\langle E \rangle = \int E \cdot dP = \int_{-\infty}^{\infty} As^2 \cdot \sqrt{A/\pi k_BT} \cdot \exp(-As^2/k_BT)\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot \frac{k_BT}{A} x^2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi k_BT}} \cdot \exp(-x^2) \cdot \sqrt{\frac{k_BT}{A}}\, dx$$

$$= \frac{k_BT}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

<u>Dette</u> integralet er $\sqrt{\pi}/2$:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$

$$\Rightarrow I_0^2(\alpha) = \dots = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi \Big|_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha r^2}\right) = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad I_0(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Dermed:

$$I_2(\alpha) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha)$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-3/2}$$

$$\Rightarrow I_2(\alpha=1) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot 1^{-3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Følgelig:

$$\langle E\rangle = \langle As^2\rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

som vi skulle vise.

Nå: $\langle E\rangle$ med Plancks kvantehypotese:

$$E_n = nh\nu \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Med kvantisert energi blir

$$\langle E\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cdot p_n$$

også her med sannsynlighet p_n prop. med Boltzmannfaktoren $\exp(-E_n/k_BT)$. Vi skriver

$$p_n = \frac{1}{Z}\exp(-\beta E_n) \quad ; \quad \text{dvs } \beta \equiv 1/k_BT$$

Normering av sannsynlighet gir nå

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_n \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} = 1$$

dvs

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{partisjonsfunksjonen}$$

(kalles også tilstandssum, Zustandsum på tysk)

Her blir Z en enkel geometrisk rekke:

Innfør $x = \exp(-h\nu\beta)$, da er

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

Midlere energi pr svingemode blir nå:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{Z}\left(-\frac{d}{d\beta}\right) \sum_n e^{-\beta E_n} = -\frac{1}{Z}\frac{dZ}{d\beta}$$

$$\frac{dZ}{d\beta} = \frac{dZ}{dx} \cdot \frac{dx}{d\beta} = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-h\nu)x$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = -(1-x) \cdot \frac{(-h\nu x)}{(1-x)^2} = \frac{h\nu x}{1-x} = \frac{h\nu}{1/x - 1}$$

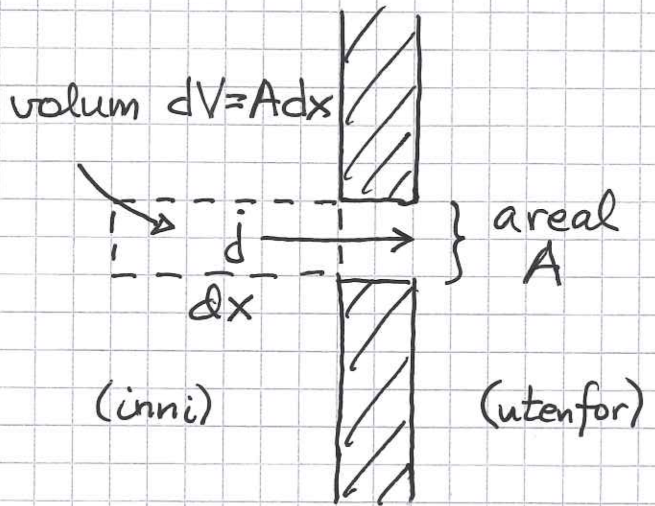
$$= \frac{h\nu}{\exp(h\nu\beta) - 1}$$

Dermed:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

Som (essensielt) er <u>Plancks strålingslov</u>.

Vi lager nå et lite hull i den ene veggen, slik at strålingsenergi sendes ut (emitteres) fra hulrommet. (I likevekt må like mye energi tilføres (absorberes), f.eks. ved at omgivelsene sender strålingsenergi inn gjennom det lille hullet.)



Midlere emittert energi pr flate- og tidsenhet:

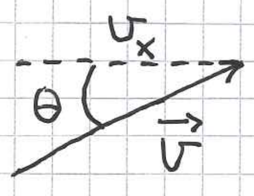
$$j = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dU}{A \cdot dt} \right\rangle$$

bare halvparten av fotonene er på vei <u>mot</u> åpningen!

$dU = u \cdot dV = u \cdot A \cdot dx$ = strålingsenergi i volumet dV

$$\Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} u \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} u \langle v_x \rangle$$

Midlere x-komponent av fotonenes hastighet (dvs midlet over dem som er på vei mot høyre, med $v_x > 0$):



$$|\vec{v}| = c \;; \quad v_x = c \cos\theta \;;$$

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \;; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\langle v_x \rangle = \frac{\iint v_x \, d\Omega}{\iint d\Omega} \;; \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \langle v_x \rangle = c \cdot \frac{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \cos\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta}$$

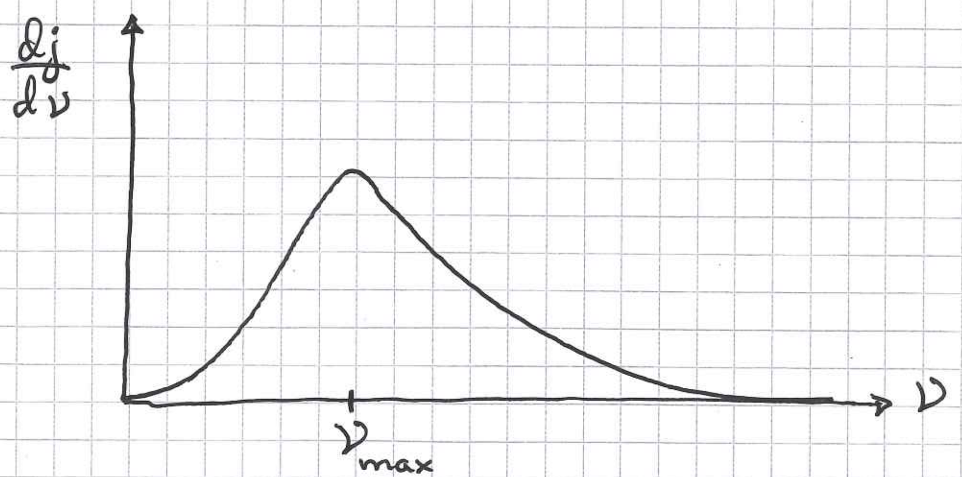
$$\int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta = \Big|_0^{\pi/2} (-\cos\theta) = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \cos\theta = \Big|_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \langle v_x \rangle = c/2 \qquad \Rightarrow \quad j = \frac{1}{2} u \cdot \frac{c}{2} = \frac{c}{4} u$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3 / c^2}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

som (også!) er Plancks strålingslov



Maksimal $dj/d\nu$ ved frekvens ν_{max},
bestemt ved $\frac{d}{d\nu}\left(\frac{dj}{d\nu}\right) = 0$

Stefan-Boltzmanns lov:

Finner total emittert effekt pr flateenhet ved å integrere $dj/d\nu$ over alle mulige frekvenser.

$$j(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{dj}{d\nu} = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 \, d\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}$$

Innfør $y = \frac{h\nu}{k_B T} \Rightarrow \nu = \frac{k_B T}{h} y \; ; \; d\nu = \frac{k_B T}{h} dy$

$$\Rightarrow j(T) = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \left(\frac{k_B T}{h}\right)^4 \cdot \underbrace{\int_0^\infty \frac{y^3}{e^y - 1} dy}_{= \pi^4/15}$$

(Rottmann e.l.)

$$\Rightarrow \boxed{j(T) = \sigma T^4 \; ; \; \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \, \frac{W}{m^2 K^4}}$$

Bølgelengdefordelingen: $j(T) = \int_0^\infty d\lambda \, \frac{dj}{d\lambda}$

med $dj/d\lambda = \dfrac{2\pi hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$

Maksimal $dj/d\lambda$ ved bølgelengde λ_{max}, gitt ved

$$\lambda_{max} \cdot T = 2898 \; \mu m \cdot K$$

som er Wiens forskyvningslov.