

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN TEP4145 KLASSISK MEKANIKK

Mandag 21. mai 2007 kl. 0900 - 1300

Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 6).

Vedlegg B: Formler (Side 7).

Prøva består av 5 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Gjør oppgavene 1, 2 og 3, samt enten oppgave 4 (fysikk) eller oppgave 5 (teknisk kybernetikk).

**Merk** at Einsteins summekonvensjon, dvs summasjon over gjentatte indekser, benyttes, med mindre noe annet er spesifisert.

Sensuren kommer når den er klar, seinest 12. juni.

## Vedlegg A: Oppgavene

**OPPGAVE 1** [Teller 25%]

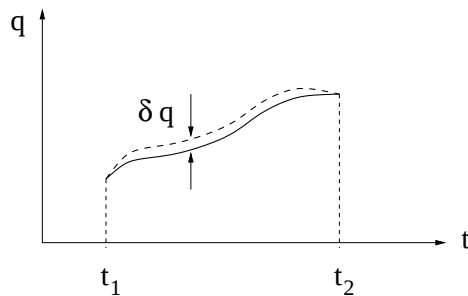
a) Utled Lagranges ligning,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

fra Hamiltons prinsipp

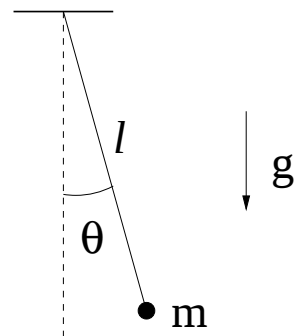
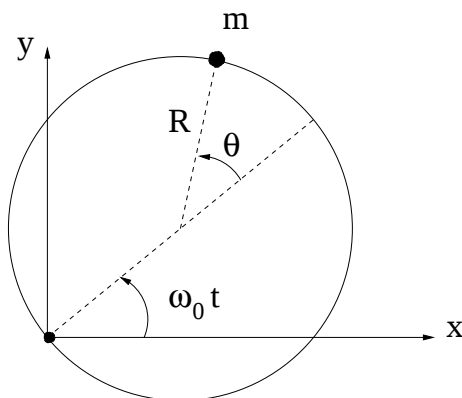
$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

for et system med en frihetsgrad. Her er det ingen variasjon i endepunktene, og virtuelle variasjoner i koordinaten  $q$  gjøres ved fast tid  $t$ , dvs  $\delta t = 0$ .



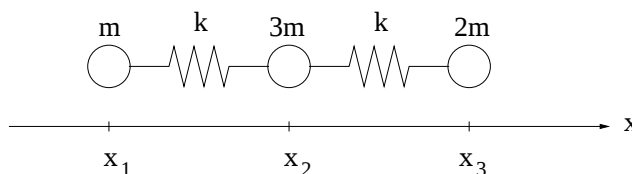
b) En punktformet masse  $m$  glir uten friksjon på en ring som roterer mot klokka i  $xy$ -planet med konstant vinkelhastighet  $\omega_0$ . Ringen, som har radius  $R$ , roterer omkring et punkt på ringen. Dette punktet ligger fast i origo  $x = y = 0$ , som vist i figuren nedenfor (til venstre).

- Finn lagrangefunksjonen  $L(\theta, \dot{\theta})$  til massen  $m$ .
- Finn Lagranges ligning, dvs bevegelsesligningen for massen  $m$ .
- Bevegelsesligningen ville bli den samme dersom massen  $m$  svingte fram og tilbake i enden av ei masseløs stang i tyngdefeltet (se figuren nedenfor, til høyre; tyngdens akselerasjon =  $g$ ). Vis dette og bestem stangas lengde  $l$ .



**OPPGAVE 2** [Teller 25%]

Tre kuler med masse henholdsvis  $m$  (kule nr 1, til venstre),  $3m$  (kule nr 2, i midten) og  $2m$  (kule nr 3, til høyre) er koblet sammen med to identiske (og ideelle) fjærer med fjærkonstant  $k$ , som vist i figuren:



Fjærene kan kun strekkes, ikke bøyes. Vi antar at kulene bare kan bevege seg langs  $x$ -aksen, og vi skal her betrakte oscillasjoner omkring kulenes likevektsposisjoner, som er henholdsvis  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  og  $x_{30}$ .

- Bruk kulenes utsving fra likevekt,  $\eta_i = x_i - x_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), som koordinater og bestem (de symmetriske) matrisene  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{T}$  i de kvadratiske uttrykkene

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j,$$

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j,$$

for systemets potensielle og kinetiske energi. Her er  $V_{ij}$  og  $T_{ij}$  matriseelementer av henholdsvis  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{T}$ .

- Løs den sekulære ligningen

$$|\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}| = 0,$$

og bestem derved systemets to egenfrekvenser  $f_\alpha = \omega_\alpha/2\pi$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Finn tallverdier for  $f_\alpha$  når  $m = 100$  g og  $k = 10^3$  N/m. (Se bort fra moden med  $\omega = 0$ , som tilsvarer ren translasjon av systemet.)

**OPPGAVE 3** [Teller 25%.]

I denne oppgaven skal vi studere en kanonisk transformasjon  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  av en enkel endimensjonal harmonisk oscillator ( $i = \sqrt{-1}$ ):

$$\begin{aligned} Q(q, p) &= \frac{1}{\sqrt{2i}}(q + ip), \\ P(q, p) &= \frac{-1}{\sqrt{2i}}(q - ip). \end{aligned}$$

Vi setter for lettvinhets skyld  $m = k = 1$  ( $m$  = massen og  $k$  = fjærkonstanten til oscillatoren).

- Hva er oscillatorens hamiltonfunksjon  $H(q, p) = T + V$ ?
- Vis at den gitte transformasjonen  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  er kanonisk. Tips: Benytt deg av at poissonklammer er invariante under en kanonisk transformasjon, for eksempel  $[q, p] = [Q, P]$ .
- Bestem hamiltonfunksjonen  $K(Q, P)$  i de nye koordinatene  $Q, P$ . (Her er  $K = H$ .)
- Finn Hamiltons ligninger for  $Q$  og  $P$  og løs disse med startbetingelsene  $q(t=0) = p(t=0) = 1$ .
- Hva er oscillatorens totale energi?

**OPPGAVE 4** [For fysikkstudentene, teller 25%.]

a) Den elektromagnetiske felttensoren  $F_{\mu\nu}$  er definert ved

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Bestem elementene i matrisen  $\mathbf{F}$  (dvs: uttrykt ved feltene  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$ ).

b) Vis at  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  er invariant under en lorentztransformasjon.

c) En punktladning  $q$  passerer origo ved tidspunktet  $t = 0$  og beveger seg med konstant hastighet  $v$  i positiv  $x$ -retning. La oss kalle inertialsystemet hvor punktladningen er i ro for  $S_0$  og inertialsystemet hvor punktladningen beveger seg med hastighet  $v\hat{x}$  for  $S$  ( $\hat{x}$  er enhetsvektor). Det oppgis at det elektriske feltet i avstand  $\mathbf{r}$  fra punktladningen er

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

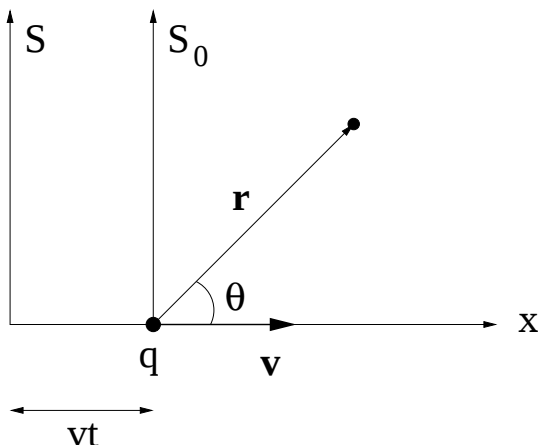
målt i  $S$ . Her angir  $\theta$  vinkelen mellom  $x$ -aksen og  $\mathbf{r}$ , se figuren nedenfor, og  $\beta = v/c$ . Hva er magnetfeltet  $\mathbf{B}_0$  målt i  $S_0$ ? Vis at magnetfeltet, målt i  $S$ , kan skrives på formen

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

d) Hva blir magnetfeltet  $\mathbf{B}$  i den ikke-relativistiske grensen  $v \ll c$ ? Sammenlign resultatet med Biot-Savarts lov,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Skisser feltlinjer for  $\mathbf{B}$  i  $yz$ -planet.



**OPPGAVE 5** [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) La oss ta utgangspunkt i hvordan antall individer i en dyrekoloni utvikler seg med tiden. Anta - enklest mulig - at bestanden vokser med en fast faktor hvert år, dvs. at det eksisterer en  $\mu > 1$  slik at

$$b_{n+1} = \mu b_n,$$

der  $b_n$  er bestanden i år  $n$  og  $b_{n+1}$  er bestanden i år  $n + 1$ . Hva slags ligning er dette, og hva er den generelle løsningen? Skriv ned en kort forklaring på hvorfor denne modellen er urealistisk.

b) En forbedret modell oppnås ved å la  $B$  være øvre estimat på antall dyr kolonien kan romme. Definer modellen ved at

$$b_{n+1} = \mu b_n \left(1 - \frac{b_n}{B}\right).$$

Vi innfører relativ bestand

$$x_n = \frac{b_n}{B},$$

og har da

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n).$$

Videre definerer vi

$$F_\mu(x) = \mu x (1 - x),$$

som gir at

$$x_{n+1} = F_\mu(x_n).$$

Lag en enkel skisse av  $F_\mu(x)$ , og skriv ned koordinatene til topp-punktet. La  $x_0$  være skjæringspunktet mellom grafen til  $y = F_\mu(x)$  og grafen til  $y = x$ . Hva er da  $x_n$  som funksjon av  $x_0$ ? Hva slags punkt er  $x_0$ ?

c) Definer begrepet fikspunkt for en funksjon  $f$ . Definer begrepet periodisk punkt for en funksjon  $f$ , og gjør rede for begrepet grunnperiode for punktet. Forklar/definer tiltrekkende fikspunkt og frastøtende fikspunkt for en funksjon  $f$ .

d) Betrakt nå avslutningsvis

$$F_\mu(x) = \mu x (1 - x).$$

Bestem de to fikspunktene til  $F_\mu$ . La øvre skranke for  $\mu$  være 3, og avgjør om fikspunktene er tiltrekkende eller frastøtende.

## Vedlegg B: Formler

Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- Poissonklammer:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

- Firervektor:

$$x_\mu = (\mathbf{r}, ict)$$

- Firerpotensial:

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\phi/c)$$

- Elektromagnetisk felt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Lorentztransformasjon (med relativ hastighet  $\mathbf{v} = v\hat{x}$ ):

$$L_{22} = L_{33} = 1 \quad , \quad L_{11} = L_{44} = \gamma \quad , \quad L_{14} = -L_{41} = i\beta\gamma$$

$$\beta = v/c \quad , \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- Lorentztransformasjon av elektromagnetisk felt (der inertialsystemet  $S_0$  beveger seg med hastighet  $v\hat{x}$  relativt til  $S$ ):

$$E_x = E_{0x} \quad , \quad E_y = \gamma(E_{0y} + vB_{0z}) \quad , \quad E_z = \gamma(E_{0z} - vB_{0y})$$

$$B_x = B_{0x} \quad , \quad B_y = \gamma(B_{0y} - \frac{v}{c^2}E_{0z}) \quad , \quad B_z = \gamma(B_{0z} + \frac{v}{c^2}E_{0y})$$

- Trigonometriske relasjoner:

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I TEP4145 KLASSISK MEKANIKK  
Mandag 21. mai 2007 kl. 0900 - 1300

Løsningsforslaget er på i alt 9 sider.

### OPPGAVE 1 [Teller 25%]

a) Faste endepunkter gir

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt$$

Virtuelle variasjoner ved fast  $t$  (dvs  $\delta t = 0$ ):

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

Ombytte av  $\delta$  og  $d/dt$  gir

$$\delta \dot{q} = \delta \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q,$$

og dermed

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt$$

Delvis integrasjon på siste ledd:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \left|_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \right.$$

Her forsvinner første ledd fordi  $\delta q = 0$  i endepunktene. Dermed:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

Ettersom  $\delta q$  er vilkårlig, må integranden forsvinne, dvs

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

som er Lagranges ligning.

b)

- Her er  $V = 0$ , så

$$L = T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Vi ser fra figuren (neste side) at

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega_0 t + R \cos(\omega_0 t + \theta) \\ y &= R \sin \omega_0 t + R \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega_0 \sin \omega_0 t - R(\omega_0 + \dot{\theta}) \sin(\omega_0 t + \theta) \\ \dot{y} &= R\omega_0 \cos \omega_0 t + R(\omega_0 + \dot{\theta}) \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

Vi kvadrerer og legger sammen:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (R\omega_0)^2 + R^2(\omega_0 + \dot{\theta})^2 + 2R^2\omega_0(\omega_0 + \dot{\theta}) [\sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \theta) + \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \theta)]$$

Deretter bruker vi trigonometriske relasjoner (gitt i formelvedlegget) og får

$$\begin{aligned}\sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \theta) + \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \theta) &= \sin \omega_0 t \sin \omega_0 t \cos \theta + \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t \sin \theta + \\ &\quad \cos \omega_0 t \cos \omega_0 t \cos \theta - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \sin \theta \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

Systemets lagrangefunksjon er dermed

$$L = mR^2 \left[ \omega_0^2 + \omega_0 \dot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0 (\omega_0 + \dot{\theta}) \cos \theta \right]$$

Kommentar: Noen hadde oppfattet det slik at ringen også var plassert i tyngdefeltet. Det ble sett på med stor forståelse. Dog ville det da være på sin plass med en fornuftig kommentar når det ble problematisk å sammenligne ringen med pendelen.

- Vi må regne ut de ulike (partielle) deriverte av  $L$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mR^2 \omega_0 (\omega_0 + \dot{\theta}) \sin \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 [\omega_0 + \dot{\theta} + \omega_0 \cos \theta] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mR^2 [\ddot{\theta} - \omega_0 \dot{\theta} \sin \theta]\end{aligned}$$

Lagranges ligning blir

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

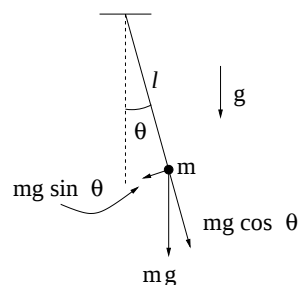
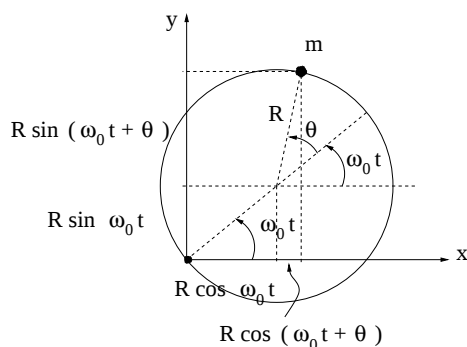
- Fra figuren (nedenfor) ser vi at tyngdekraftens komponent vinkelrett på pendelen er  $-mg \sin \theta$ . I følge Newtons 2. lov skal denne kraften være lik  $ma$ , der  $a = l\ddot{\theta}$ . Pendelens bevegelse beskrives dermed av ligningen

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Samme oppførsel som massen på den roterende ringen dersom pendelen har lengde

$$l = \frac{g}{\omega_0^2}$$

Pendelproblemet kan selvsagt også løses med "Lagrange-teknikk".



## OPPGAVE 2 [Teller 25%]

Sammenpressing i fjæra til venstre:

$$(x_1 - x_2) - (x_{10} - x_{20}) = \eta_1 - \eta_2$$

Sammenpressing i fjæra til høyre:

$$(x_2 - x_3) - (x_{20} - x_{30}) = \eta_2 - \eta_3$$

Strekk i fjærene blir tilsvarende, med motsatt fortegn.

Systemets potensielle energi blir

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_1 - \eta_2\eta_3 - \eta_3\eta_2) \end{aligned}$$

Matrisen  $\mathbf{V}$  blir dermed

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Systemets kinetiske energi er

$$T = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}m_i\dot{\eta}_i^2$$

Matrisen  $\mathbf{T}$  blir dermed

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 3m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

Systemets egenfrekvenser bestemmes av den sekulære ligningen

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - 3\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - 2\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

Stryker en felles faktor  $k^3$  for hele determinanten og innfører

$$\alpha \equiv \frac{\omega^2 m}{k}$$

for å forenkle notasjonen litt. Det gir ligningen

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2 - 3\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Utvikling etter for eksempel første rad gir

$$(1 - \alpha)(2 - 3\alpha)(1 - 2\alpha) - (1 - \alpha) - (1 - 2\alpha) = 0$$

dvs

$$6\alpha^3 - 13\alpha^2 + 6\alpha = 0$$

Vi ser bort fra moden med  $\alpha = 0$  (som tilsvarer ren translasjon av hele systemet langs  $x$ -aksen). De to andre løsningene er

$$\alpha = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

dvs

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

Dette tilsvarer frekvensene

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{k\alpha_1/m}}{2\pi} = \frac{\sqrt{2k/3m}}{2\pi} \simeq 13.0 \text{ Hz}$$

og

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{k\alpha_2/m}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3k/2m}}{2\pi} \simeq 19.5 \text{ Hz}$$

Kommentar: Vibrasjons-*bevegelsen* i hver av disse to normale modene kan bestemmes ved å regne ut de ulike underdeterminantene  $\Delta_{i\alpha}$ , dvs de ulike  $2 \times 2$ -determinantene som fås ved å "stryke" rekke nr  $i$  og kolonne nr  $\alpha$  i  $|\mathbf{V} - \omega_\alpha^2 \mathbf{T}|$  og multiplisere med  $(-1)^{i+\alpha}$ . Da vil utsvingsamplituden  $A_{i\alpha}$  for masse nr  $i$  i mode nr  $\alpha$  være proporsjonal med  $(-1)^{i+\alpha} \Delta_{i\alpha}$ . Uten at vi bryr oss om normeringen finner vi da, for mode nr 1 (med  $\alpha_1 = 2/3$ ):

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, A_{21}, A_{31}) = \left(-1, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

og for mode nr 2 (med  $\alpha_2 = 3/2$ ):

$$\mathbf{A}_2 = (A_{12}, A_{22}, A_{32}) = \left(-2, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

### OPPGAVE 3 [Teller 25%.]

• Potensiell energi:  $V = kq^2/2 = q^2/2$ . Kinetisk energi:  $T = mv^2/2 = p^2/2m = p^2/2$ . Dette gir hamiltonfunksjonen

$$H(q, p) = V + T = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

• Vi har åpenbart at  $[q, p] = 1$ , slik at vi må sjekke at  $[Q, P] = 1$ . De ulike partielle deriverte av de nye kanoniske koordinatene er

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{1}{\sqrt{2i}} & , & & \frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{i}{\sqrt{2i}} \\ \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{-1}{\sqrt{2i}} & , & & \frac{\partial P}{\partial p} &= \frac{i}{\sqrt{2i}} \end{aligned}$$

Dermed:

$$[Q, P] = \frac{1}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2i}} - \frac{-1}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Her var det også andre varianter som førte fram.

- Regner først ut  $q$  og  $p$  uttrykt ved  $Q$  og  $P$ :

$$q = \sqrt{\frac{i}{2}} (Q - P) \quad , \quad p = \frac{1}{\sqrt{2i}} (Q + P)$$

Dermed blir hamiltonfunksjonen i nye koordinater

$$\begin{aligned} K = H &= \frac{1}{2} (q^2 + p^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{i}{2} (Q^2 - 2QP + P^2) + \frac{1}{2i} (Q^2 + 2QP + P^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{i}{2} \cdot (-4QP) \\ &= -iQP \end{aligned}$$

- Hamiltons ligninger blir:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = -iQ \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = iP \end{aligned}$$

som har løsninger

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 e^{-it} \\ P(t) &= P_0 e^{it} \end{aligned}$$

Med de gitte startbetingelsene  $q(t=0) = p(t=0) = 1$  får vi

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2i}} (1 + i) = 1 \\ P(0) &= P_0 = \frac{-1}{\sqrt{2i}} (1 - i) = i \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1+i}{\sqrt{2i}} e^{-it} = e^{-it} \\ P(t) &= \frac{i-1}{\sqrt{2i}} e^{it} = i e^{it} \end{aligned}$$

- Oscillatorens totale energi:

$$E = K = H = \frac{1}{2} (1 + 1) = 1$$

**OPPGAVE 4** [For fysikkstudentene, teller 25%.]

a) Firerpotensialet er

$$A_\mu = (\mathbf{A}, i\phi/c)$$

mens feltene er relatert til  $A_\mu$  slik:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}$$

Med andre ord:

$$\begin{aligned}E_j &= -\frac{\partial\phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t} \\ B_1 &= \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\end{aligned}$$

(osv syklisk for  $B_2$  og  $B_3$ ) Fra definisjonen

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

ser vi uten videre at  $F_{\mu\mu} = 0$  og  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ . Det holder altså å regne ut de 6 elementene over (eller under) diagonalen:

$$\begin{aligned}F_{12} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{A})_z = B_z = B_3 \\ F_{13} &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -(\nabla \times \mathbf{A})_y = -B_y = -B_2 \\ F_{23} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (\nabla \times \mathbf{A})_x = B_x = B_1 \\ F_{14} &= \frac{\partial A_4}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{i}{c} \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{c} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) = -\frac{i}{c} E_1 \\ F_{24} &= \frac{\partial A_4}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} = \frac{i}{c} \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{c} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) = -\frac{i}{c} E_2 \\ F_{34} &= \frac{\partial A_4}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} = \frac{i}{c} \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{c} \left( -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial t} \right) = -\frac{i}{c} E_3\end{aligned}$$

b) Transformasjonsligningene for  $E_j$  og  $B_j$  er gitt i formelvedlegget for relativ bevegelse langs  $x$ -aksen. Bruker disse og får:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z \\ &= E_{0x} B_{0x} + \gamma^2 (E_{0y} + v B_{0z}) \left( B_{0y} - \frac{v}{c^2} E_{0z} \right) + \gamma^2 (E_{0z} - v B_{0y}) \left( B_{0z} + \frac{v}{c^2} E_{0y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_{0x}B_{0x} + E_{0y}B_{0y}\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + E_{0z}B_{0z}\gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right) + \\
&\quad E_{0y}E_{0z}\left(-\gamma^2\frac{v}{c^2} + \gamma^2\frac{v}{c^2}\right) + B_{0y}B_{0z}\left(\gamma^2v - \gamma^2v\right) \\
&= E_{0x}B_{0x} + E_{0y}B_{0y} \cdot 1 + E_{0z}B_{0z} \cdot 1 \\
&= \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{B}_0
\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

c) I inertialsystemet  $S_0$  er ladningen i ro, så der er  $\mathbf{B}_0 = 0$ . Da gir transformasjonsligningene

$$B_x = 0 \quad , \quad B_y = -\gamma\frac{v}{c^2}E_{0z} \quad , \quad B_z = \gamma\frac{v}{c^2}E_{0y}$$

og dessuten

$$E_y = \gamma E_{0y} \quad , \quad E_z = \gamma E_{0z}$$

Dermed:

$$B_y = -\frac{v}{c^2}E_z \quad , \quad B_z = \frac{v}{c^2}E_y$$

Hastigheten er

$$\mathbf{v} = v \hat{x}$$

slik at vi kan skrive

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_x = 0 \quad , \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_y = -v E_z \quad , \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{E})_z = v E_y$$

Ved sammenligning ser vi da at vi har

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

d) I den ikke-relativistiske grensen  $v \ll c$  ( $\beta \ll 1$ ) reduserer uttrykket for  $\mathbf{E}$  (gitt i oppgaveteksten under punkt c) seg til

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Magnetfeltet blir da

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Vi kan skrive  $\mathbf{v} = d\mathbf{l}/dt$ , dvs ladningen forflytter seg et veielement  $d\mathbf{l}$  i løpet av en tid  $dt$ . Da har (den midlere) strømmen på dette veielementet vært  $I = q/dt$ , så vi kan skrive

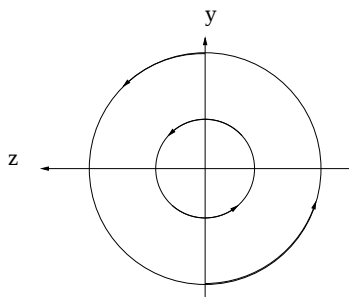
$$q\mathbf{v} = \frac{q}{dt} d\mathbf{l} = I d\mathbf{l}$$

og dermed

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

som er Biot-Savarts lov.

Feltlinjer for  $\mathbf{B}$  i  $yz$ -planet:



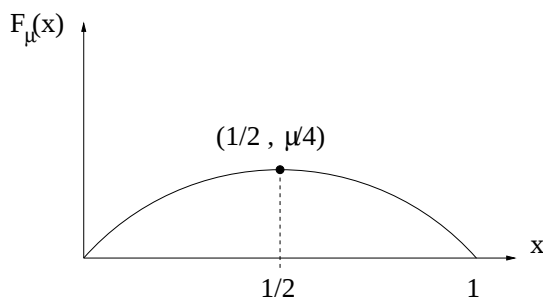
**OPPGAVE 5** [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) Dette er en førsteordens lineær differensligning. Den generelle løsningen er

$$b_n = \mu^n b_0.$$

Modellen er urealistisk fordi veksten er eksponensiell, uten noen øvre grense.

b) Skisse av funksjonen  $F_\mu(x)$ :



Vi får  $x_n = x_0$  for alle  $n$ . Punktet  $x_0$  blir et *likevektspunkt* for bestanden. ( $x_0$  er også et *fikspunkt*.)

c)  $x$  er et fikspunkt for  $f$  dersom  $f(x) = x$ . Dersom  $f^{(n)}(x) = x$ , sier vi at  $x$  er periodisk med periode  $n$ . Hvis  $f^{(k)}(x) \neq x$  for alle  $k$ ,  $1 \leq k < n$ , så er  $n$  grunnperioden til  $x$ .

Et fikspunkt  $x$  kalles tiltrekkende dersom  $|f'(x)| < 1$ . Punkter nær  $x$  vil da gå mot  $x$ .

Et fikspunkt  $x$  kalles frastøtende dersom  $|f'(x)| > 1$ . Punkter nær  $x$  vil da fjerne seg fra  $x$ .

d) Fikspunkter for  $F_\mu(x)$ :

$$x = 0 \quad , \quad x = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Vi har at

$$F'_\mu(0) = \mu \quad , \quad F'_\mu\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = 2 - \mu$$

For  $1 < \mu < 3$  har vi dermed et frastøtende fikspunkt i  $x = 0$  og et tiltrekkende fikspunkt i  $x = (\mu - 1)/\mu$ .