4. Kovariant firedimensjonal formulering

[NB! Uttrykket "kovariant" har her ingenting å gjøre med distinksjonen mellom ulike vektorkomponenter innført på s. 118 !!]

Har erstattet den feilaktige Galileitransf. med Lorentztransf. Ønsker nå å kontrollere fysikkens lover og se om de har samme form i alle inertialsystemer.

⇒ Vi må sjekke om ligningene er invariante i form under en Lorentztransformasjon

[Kovariant ≡ Forminvariant i denne forbindelse]

Ligningene som beskriver ulike fysiske lover vil angi sammenhengen mellom skalarer, vektorer eller tensorer (matriser). Da skalarer og vektorer er spesialtilfeller av tensorer, må vi generelt kreve kovarians av tensorligninger, dvs:

Hvis $C_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}$ må også $C'_{\mu\nu} = D'_{\mu\nu}$

etter en Lorentztransformasjon

Starter med å betrakte et punkt i Minkowskirommet med koordinater (x_1, x_2, x_3, x_4). En partikkel som beveger seg i rommet vil beskrives av en "vei" i Minkowskirommet

"world line"

egenlinje

Liten endring av koordinatene langs egenlinjen beskrives med 4-vektoren dx_μ. Har sett at $dx_\mu dx_\mu$ er en Lorentz invariant (dvs. like stor målt i alle inertialsystemer).

Definerer <u>egentiden</u> τ : $dx_\mu dx_\mu \equiv -c^2 d\tau^2$

Legger nå inertialsystemet S' "på" partikkelen som beveger seg, dvs. partikkelen er i ro i S'. Får da

$$dx'_\mu = (0, 0, 0, ic\,dt')$$

$$\Rightarrow \quad dx'_\mu dx'_\mu = -c^2 dt'^2$$

$$\Rightarrow \quad d\tau = dt'$$

dvs. $d\tau$ = tiden som måles med en klokke som beveger seg med partikkelen (derav "egentid")

Sett fra inertialsystemet S beveger partikkelen seg med hastighet u $\left(u^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 \right)$. Her er

$$dx_\mu = (dx, dy, dz, ic\,dt)$$

$$\Rightarrow dx_\mu dx_\mu = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

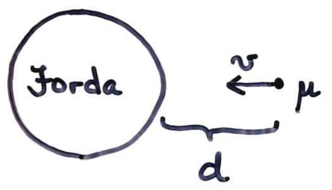
$$\Rightarrow -c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = u^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \quad d\tau^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) dt^2$$

$$\Rightarrow \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > d\tau$$

dvs. klokka i S (der partikkelen beveger seg) viser en tid dt som er lengre enn tida $d\tau$ som vises på klokka i S' (der partikkelen er i ro). "Tidsdilatasjon" !

Eks.1: Levetid for μ-mesoner (myoner) i atmosfæren



Dannes i ytre atmosfære, ved $d \sim 6$ km fra jorda, ved kosmisk stråling.

Levetid i myonets hvilesystem: $\tau = 2 \cdot 10^{-6}$ s

Hastighet i forhold til jorda: $v = 2.994 \cdot 10^{8}$ m/s

Ikkerelativistisk ville et myon tilbakelegge en avstand $l_0 = v\tau \approx 600$ m $\Rightarrow$ nesten ingen myoner skulle nå fram til oss; ikke i samsvar med målinger ved jordoverflaten hvor mange myoner detekteres.

Relativistisk betraktning må til!

(a) Sett fra jorda: Myonets levetid blir $t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx 32 \cdot 10^{-6}$ s, og med hastigheten $v = 2.994 \cdot 10^{8}$ m/s kan et typisk myon tilbakelegge en avstand $l = vt \approx 9.6$ km $> d$

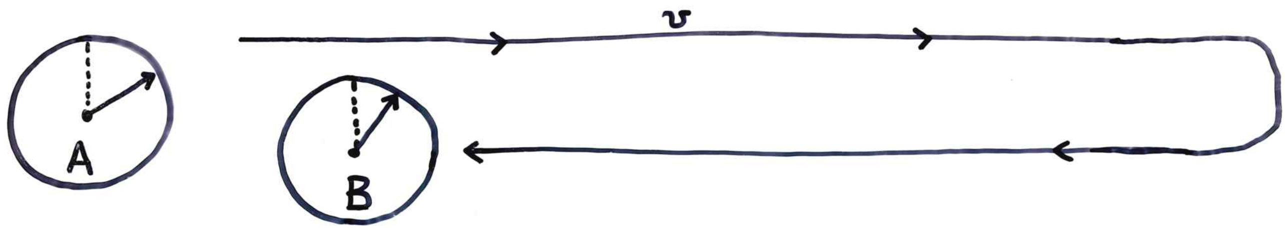
$\Rightarrow$ de fleste myoner når fram til jorda!

(b) Sett fra myonets hvilesystem: Jorda beveger seg med hastigheten $v = 2.994 \cdot 10^{8}$ m/s mot myonet. Lorentztransf. $z' = \gamma(z - vt)$ gir sammenhengen mellom avstand z' observert fra jorda og avstand z og tid t observert fra myonet. Myonet dannes ved $t = 0$. Avstand til jorda, sett fra myonet, blir dermed $z = z'\sqrt{1-\beta^2} \approx 375$ m (med $z' = 6$ km). Det betyr at jorda når fram til myonet etter en tid $t = z/v \approx 1.25 \cdot 10^{-6}$ s $< \tau$

$\Rightarrow$ jorda når fram til myonet i god tid før det "dør"!

[Eksperiment, CERN 1975: Bailey et al., Physics Letters 55B, 420 (1975)]

Tvillingparadokset



B reiser vekk fra A, snur, og kommer tilbake.

Klokke A viser at B har vært borte en tid T, mens klokke B viser at B har vært borte en tid T/γ.

Men: Kan ikke B oppfatte situasjonen slik at det er han som er i ro, mens A reiser vekk og kommer tilbake? I såfall ville B forvente at A har målt en tid T/γ^2 på sin klokke.

Nei! Situasjonen er ikke symmetrisk. Asymmetrien kommer av at B <u>snur</u>. Han endrer sin hastighet fra v til $-v$ og utsettes dermed for en akselerasjon (som han selv kan måle). M.a.o., B skifter fra et inertialsystem til et annet.

Denne asymmetrien kan utledes mer rigorøst ved å betrakte lyssignaler emittert fra A og B med <u>jevne</u> mellomrom (målt på A og B's egne klokker!) og benytte Dopplereffekten: På vei ut mottar både A og B den andres signal med redusert frekvens $f' = f[(1-\beta)/(1+\beta)]^{1/2}$. Når B snur, mottar han <u>straks</u> signaler med frekvens $f'' = f[(1+\beta)/(1-\beta)]^{1/2}$ fra A, men det <u>tar en tid</u> L/c før A begynner å motta signaler med frekvens f'' fra B!

Eks. 2: Klokker i rutefly rundt jorda

Nøyaktige Cs-klokker plasseres i fly som går rundt jorda. Tidsdilatasjon målt med en nøyaktighet på ca. 10%
[Hafele og Keating, Science **177**, 166 (1972)]

Med $v \sim 500$ km/t ~ 140 m/s blir $\gamma \approx 1 + 10^{-13}$. Dermed, med $\Delta t \approx 11$ timer $\approx 4 \cdot 10^4$ s, blir $\Delta\tau = \Delta t\,(1 - 10^{-13}) = \Delta t - 4 \cdot 10^{-9}$ s.

Dvs: klokka i flyet har saktnet seg ca 4 nanosekunder i forhold til ei klokke på jorda.

Vi har sett at $ds^2 = dx_\mu dx_\mu$ kan være positiv, negativ eller lik null. Sier at en 4-vektor x_μ er

romrettet	("space-like")	dersom	$x_\mu x_\mu > 0$
tidsrettet	("time-like")	—"—	$x_\mu x_\mu < 0$
null	("light-like")	—"—	$x_\mu x_\mu = 0$

Hvorfor disse betegnelsene?

Betrakt to "begivenheter" beskrevet ved hhv. $x_{1\mu} = (\vec{r}_1, ict_1)$ og $x_{2\mu} = (\vec{r}_2, ict_2)$. Ser så på differansevektoren

$$X_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2\,,\ ic(t_1 - t_2))$$

med norm

$$X_\mu X_\mu = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

Velger koord. system slik at $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ligger langs z-aksen.
I et system S' som beveger seg med hastighet v langs z-aksen, blir da $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} z)$, og dermed

$$t_1' - t_2' = \gamma\left[t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2)\right] = \frac{\gamma}{c}\left[c(t_1-t_2) - \beta(z_1 - z_2)\right]$$

Hvis X_μ er <u>romrettet</u> (eller null), er $X_\mu X_\mu \geq 0$, dvs

$$c|t_1 - t_2| \leq |z_1 - z_2|,$$

og vi kan alltid finne en hastighet $v \leq c$ som gir $t_1' - t_2' = 0$.
Dvs, det finnes alltid et inertialsystem S', med hastighet v i forhold til S, der de to begivenhetene oppfattes som <u>simultane</u>.

Hvis X_μ er <u>tidsrettet</u>, er $X_\mu X_\mu < 0$, dvs

$$c|t_1 - t_2| > |z_1 - z_2|,$$

og vi kan <u>ikke</u> finne et inertialsystem S' der de to begivenhetene oppfattes som simultane.

Altså: Hendelser med <u>romrettet</u> separasjon kan ikke forbindes med et signal som går med lyshastighet c, m.a.o., de to hendelsene kan ikke influere hverandre. Kan gjøres simultane, så "før" og "etter" er ikke entydig bestemt.
Hendelser med <u>tidsrettet</u> separasjon <u>kan</u> forbindes med signal som går med hastighet c, så de to hendelsene <u>kan</u> influere hverandre. Nå kan imidlertid hendelsene <u>ikke</u> gjøres simultane (dvs hvis $t_1 > t_2$ så er også $t_1' > t_2'$ i alle inertialsystem S'), så "før" og "etter" er entydig bestemt. <u>Kausalitet</u>: Årsak før virkning!

Firerhastighet

$$u_\mu \equiv dx_\mu / d\tau$$

u_μ er en 4-vektor da dx_μ er en 4-vektor og $d\tau$ er en (Lorentz invariant) skalar

$$dx_\mu = (dx_i\, , ic\,dt)$$

$$\Rightarrow \quad u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \gamma \frac{dx_i}{dt} = \gamma v_i$$

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = ic \frac{dt}{d\tau} = ic\gamma$$

$$\Rightarrow \quad u_\mu = \gamma(\vec{v}, ic)$$

Firerhastigheten er tidsrettet:

$$u_\mu u_\mu = \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2/c^2} = -c^2 < 0$$

Firerstrømtetthet

Kontinuitetsligningen : $\nabla \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\vec{j}$ = strømtetthet

ρ = ladningstetthet

Ved å danne 4-vektoren $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$ kan kont.lign. skrives på formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu \equiv \partial_\mu j_\mu = 0$$

Ikke uventet er j_μ nettopp 4-vektoren $\rho_0 u_\mu$, der ρ_0 er ladningstettheten i inertialsystemet hvor ladningene er i ro, og u_μ er firerhastigheten:

$$j_\mu = \rho_0 u_\mu = (\gamma \rho_0 \vec{v}, ic\gamma\rho_0) = (\rho\vec{v}, ic\rho) = (\vec{j}, ic\rho)$$

Ladn.tettheten ρ for ladninger i bevegelse blir større enn ρ_0 pga. lengdekontraksjonen: $\rho = \gamma\rho_0 > \rho_0$

Er så kontinuitetsligningen kovariant ?

Da $dx_\mu = L'_{\mu\nu}\, dx'_\nu = \tilde{L}_{\mu\nu}\, dx'_\nu = L_{\nu\mu}\, dx'_\nu$, følger at

$$\frac{\partial}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = L_{\nu\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Dermed transformerer både $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ og j_μ på samme måte som dx_μ under en Lorentztransformasjon, og $\partial_\mu j_\mu$ må derfor være en Lorentz invariant skalar.

$\Rightarrow$ Kont. lign. <u>er</u> kovariant !

Maxwells ligninger og firerpotensial

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \qquad \left(\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}\,,\ \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\right)$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow$ kan skrive $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

fordi $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ for vilkårlig vektor $\vec{A}$

Dermed:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$\Rightarrow$ kan skrive $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$

fordi $\nabla \times \nabla \chi = 0$ for vilkårlig skalar χ

Anta vakuum : $\vec{P} = 0$ og $\vec{M} = 0$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \right] = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\rho / \varepsilon_0$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Identitet: $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \vec{j}$$

Maxwells 4 ligninger for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er redusert til 2 ligninger for ϕ og $\vec{A}$. Fremdeles koblede ligninger.

Lign. for ϕ og $\vec{A}$ kan "dekobles" ved å utnytte at vi har en viss frihet i valget av ϕ og $\vec{A}$:

Da $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, vil $\vec{B}$ bli uforandret ved transformasjonen

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \qquad (\chi = \text{vilkårlig skalar})$$

(husk: $\nabla \times \nabla \chi = 0$), men da $\vec{E} = -\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t$, må vi samtidig foreta transformasjonen

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

for at $\vec{E}$ også skal forbli uforandret. Denne friheten til å justere potensialene ϕ og $\vec{A}$ kalles justérinvarians, eller (mer vanlig) "Gaugeinvarians".

Et vanlig valg er å ta en χ som oppfyller

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Dette er såkalt Lorentz gauge og henger sammen med Lorentzbetingelsen

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

[Dermed: Hvis $\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$, får vi også

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \nabla\cdot(\vec{A} + \nabla\chi) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right)$$

$$= \underbrace{\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}}_{=0} = 0 \;]$$

Bruker nå Lorentzbetingelsen til å dekoble ligningene for ϕ og $\vec{A}$:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\rho/\varepsilon_0 \qquad ①$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}_{=0} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\Rightarrow \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \qquad ②$$

Nå kan vi innføre <u>firerpotensialet</u> $A_\mu = (\vec{A}, i\frac{\phi}{c})$

$\Rightarrow$ Lorentzbetingelsen : $\partial_\mu A_\mu = 0$

"Bølgeligningene" ① og ②: $\square^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu$

Her er $\square^2 \equiv \partial_\mu\partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ <u>D'Alemberts operator</u>, mens firerstrømtettheten $j_\mu = (\vec{j}, ic\rho)$ ble definert på s.125.

Dermed: A_μ transf. som j_μ, dvs som u_μ, dvs som x_μ under en Lorentztransformasjon ($\square^2$ er en invariant skalar operator!)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Maxwells elektromagnetiske teori er kovariant, dvs i samsvar med den spesielle relativitetsteorien.}}$

5. Relativistisk mekanikk

Newtons Lov, $F = ma$, invariant under Galileitransf. og ikke under Lorentztransf.

$\Rightarrow$ Vi må finne en generalisering av Newtonmekanikk som

(a) tilfredsstiller kravet om kovarians i spesiell rel.teori, og

(b) reduserer seg til $\frac{d}{dt}(mv_i) = F_i$ for $v_i \ll c$

Naturlig forsøk: $\frac{d}{d\tau}(m u_\mu) = K_\mu$

$m =$ invariant masse
$\tau =$ egentid
$u_\mu =$ firerhastighet
$K_\mu =$ Minkowskikraft

$$\left.\begin{aligned} \lim_{v\to 0} d\tau &= \lim_{v\to 0} \frac{1}{\gamma}\, dt = dt \\ \lim_{v\to 0} u_i &= \lim_{v\to 0} \gamma v_i = v_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{må kreve } \lim_{v\to 0} K_i = F_i$$

Bruker elektromagnetisk teori som utgangspunkt, fordi

(a) vi har sett at den er kovariant, og

(b) vi kjenner Lorentzkraften $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) = q\left(-\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right)$$

$$\vec{v}\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad F_i = -q\left(\partial_i(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) + \frac{dA_i}{dt}\right)$$

Da $u_\mu A_\mu = \gamma v_i A_i + \gamma ic\,\frac{i\phi}{c} = \gamma(\vec{v}\cdot\vec{A} - \phi)$

og $dt = \gamma\, d\tau$, får en

$$F_i = -q\left(-\frac{1}{\gamma}\partial_i(u_\mu A_\mu) + \frac{1}{\gamma}\frac{dA_i}{d\tau}\right)$$
$$= \frac{q}{\gamma}\left(\partial_i(u_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau}\right)$$

Både $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ og dA_i transf. som romkomponenter av en firervektor (mens $u_\mu A_\mu$ og $d\tau$ er invariante skalarer)

$\Rightarrow$ vi identifiserer $K_i = q\left(\partial_i(u_\mu A_\mu) - \frac{dA_i}{d\tau}\right)$

$$\Rightarrow \qquad K_i = \gamma F_i$$

Minkowskikraften blir dermed: $K_\mu = q\left(\partial_\mu(u_\nu A_\nu) - \frac{dA_\mu}{d\tau}\right)$ for kraft på ladede partikler.

Introduserer <u>firerimpulsen</u> $p_\mu = m u_\mu = (m\gamma\vec{v},\ ic\gamma m)$

$$\Rightarrow \quad K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

Med $\vec{K} = d\vec{p}/d\tau$, $d\tau = \frac{1}{\gamma}dt$ og $\vec{K} = \gamma\vec{F}$ får vi

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \qquad \text{også relativistisk!}$$

Hva med K_4?

$$u_\mu K_\mu = u_\mu \frac{d}{d\tau}(m u_\mu) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} m u_\mu u_\mu\right) = -\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{2} m c^2\right) = 0$$

[Fra s.125: $u_\mu u_\mu = -c^2$]

$$\Rightarrow \quad u_i K_i + u_4 K_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \gamma v_i \gamma F_i + ic\gamma K_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad K_4 = \frac{i\gamma}{c} \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Dvs: $K_\mu = \gamma\left(\vec{F}, \frac{i}{c}\vec{F}\cdot\vec{v}\right)$

Vi har $dp_4/d\tau = K_4$, $p_4 = m u_4 = icm\gamma$ og $K_4 = \frac{i}{c}\gamma\vec{F}\cdot\vec{v}$,

og dermed:

$$\frac{d}{d\tau}(icm\gamma) = \frac{i}{c}\gamma\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\gamma m c^2) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad ; \quad E = \gamma m c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

[NB: I Goldstein brukes T istedetfor E....]

Altså:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad p_\mu = \left(\vec{p}, \frac{iE}{c}\right)}$$

Hvis $\beta \ll 1$ fås $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ = hvileenergi + kinetisk energi

[Ofte brukes m_0 for den invariante massen; vi skriver bare m]

Hvis partikkelen er i et ytre felt, må den potensielle energien V legges til E for at vi skal oppnå <u>total</u> energi.

Ettersom $p_\mu = m u_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}$, må p_μ transformere på samme måte som x_μ under en Lorentztransf.

Velger v langs z-aksen som vanlig

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}' = \mathbb{L}\,\mathbb{P} \quad ; \quad \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad p_1' = p_1 \,, \quad p_2' = p_2 \,, \quad p_3' = \gamma p_3 + i\beta\gamma p_4 = \gamma\left(p_3 - \frac{\beta}{c} E\right)$$

$$p_4' = -i\beta\gamma p_3 + \gamma p_4$$

$$\frac{iE'}{c} = -i\beta\gamma p_3 + \gamma \frac{iE}{c}$$

$$\Rightarrow \quad E' = \gamma(E - v p_3)$$

La oss regne ut invarianten $p_\mu p_\mu$ i partikkelens hvilesystem:

$$p_\mu p_\mu = p^2 - E^2/c^2 = -(mc^2)^2/c^2 = -m^2c^2$$

(da $\vec{p} = 0$ og $\gamma = 1$)

Men dermed kan vi skrive generelt:

$$\boxed{E^2 = p^2c^2 + m^2c^4}$$

Et <u>foton</u> har $m = 0$ og dermed $E = pc$. Har også $E = h\nu$.

$$\Rightarrow \quad pc = h\nu \quad \Rightarrow \quad p\,\nu\lambda = h\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = h/\lambda}$$

≈: de Broglies formel for bølge-partikkel dualisme

Eks: Energibevarelse og masseendring

"Før": $\overset{m}{\bullet}$ (1) $\xrightarrow{v}$ $\qquad$ $\overset{m}{\bullet}$ (2) $\xleftarrow{-v}$

"Etter": $\overset{M}{\bullet}$ $v = 0$

Romlig impulsbevarelse, dvs $\vec{p}$ konstant i tid, impliserer umiddelbart at også energien E må være bevart, ettersom Lorentztransformasjonen "blander" E med komponent(er) av $\vec{p}$

$\Rightarrow$ total firerimpuls $P_\mu = (\vec{P}, iE/c)$ må være bevart!

$$P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu} = \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \, , \, \frac{iE_1}{c} + \frac{iE_2}{c}\right)$$

Bevarelse av P_4 : $\gamma mc^2 + \gamma mc^2 = Mc^2$

$$\Rightarrow \quad M = 2\gamma m > 2m$$

Masseøkning: $\Delta M = M - 2m = 2m(\gamma - 1)$

Tilsvarer $\Delta E = \Delta M c^2 = 2m(\gamma-1)c^2$

Kinetisk energi før kollisjonen ("sammensmeltingen") er omgjort til hvileenergi, og dermed masse.