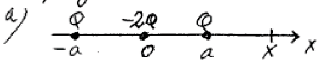
Kontinuasjonseksamen i fag
SIF 4012 Fysikk 2, 6/8-98.

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a)



Potensialet $V(x)$ vil bli en sum av potensialene fra de enkelte ladningene. En finner

$$V(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|x-a|}-\frac{2Q}{|x|}+\frac{Q}{|x+a|}\right)$$

[Videre regning gir: $V(x)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a^2}{x(x^2-a^2)}$ for $x>a$.
$V(x)=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2-ax-x^2}{x(x^2-a^2)}$ for $0<x<a$. $V(x)=V(-x)$ $(x<0)$.]

b) Elektrisk felt for $x>a$

$$E(x)=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+a}\right)$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{(x+a)^2}\right]=$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x^2+2ax+a^2+x^2-2ax+a^2}{(x^2-a^2)^2}-\frac{2}{x^2}\right]=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x^2+a^2}{(x^2-a^2)^2}-\frac{1}{x^2}\right]$$

$$=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^4+a^2x^2-(x^4-2a^2x^2+a^4)}{x^2(x^2-a^2)^2}=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2(3x^2-a^2)}{x^2(x^2-a^2)^2}$$

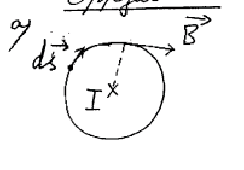
②

Langt fra kvadrupolen kan ledd a^2 neglisjeres i forhold til x^2 og en finner dermed fra svaret ovenfor

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6Qa^2}{x^4}\hat{x}$$

Oppgave 2.

a)

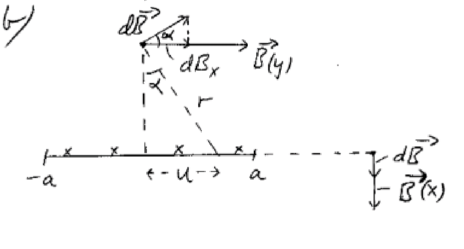


Det magnetiske feltet $\vec{B}$ vil stå vinkelrett på retningen fra lederen, og p.g.a. symmetrien vil størrelsen være konstant rundt hele sirkelen på figuren. Bruk av Ampères lov og integrering langs sirkelen konsentrisk om lederen gir dermed.

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l}=H\cdot 2\pi r=I$$

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b)



③

Element av bredde du fører strømmen

$$dI=\frac{I}{2a}du$$

og gir magnetfeltet

$$dB=\frac{\mu_0}{2\pi r}dI=\frac{\mu_0 I}{4\pi a r}du$$

På x-aksen er feltet rettet langs negativ y-akse med $r=x-u$. Integrering gir feltet på x-aksen ($dB_y=-dB$)

$$B_y(x)=\int dB_y=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-a}^{a}\frac{du}{x-u}=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big|_{-a}^{a}\left[-\ln(x-u)\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$$

På y-aksen danner dette feltet en vinkel α med x-aksen. På grunn av symmetrien vil y-komponenten forsvinne ved integrering. For x-komponenten har vi $dB_x=dB\cos\alpha=\frac{y}{r}dB$.
Med $r^2=y^2+u^2$ finner vi da

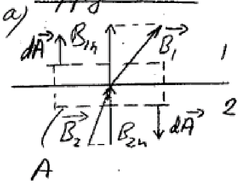
$$B_x(y)=\int dB_x=\int\frac{y}{r}dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-a}^{a}\frac{y\,du}{u^2+y^2}=$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big|_{-a}^{a}\operatorname{Arctg}\left(\frac{u}{y}\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\operatorname{Arctg}\left(\frac{a}{y}\right)$$

④

Oppgave 3

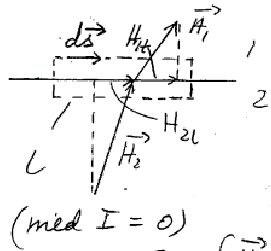
a)



Benytter Gauss lov for magnetfelt på flaten av areal A på begge sider av grenseflaten som angitt på figuren. En finner da

$$0=\oint\vec{B}\,d\vec{A}=B_{1n}A-B_{2n}A$$

$$B_{1n}=B_{2n}$$



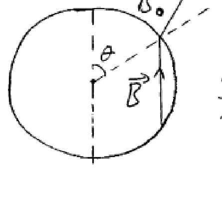
Benytter Ampères lov for $\vec{H}$-feltet langs kurven av lengde l på hver side av grenseflaten, og en finner

(med $I=0$)

$$0=\oint\vec{H}\,d\vec{s}=H_{1t}\,l-H_{2t}\,l$$

$$H_{1t}=H_{2t}$$

b)



Innenfor kula er:
Normalkomponenten: $B_n=B\cos\theta$
Tangensialkomponenten: $B_t=B\sin\theta$

5

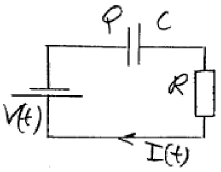
Bruk av grensebetingelsene gir så

$$B_{on} = B_n = B\cos\theta$$
$$H_{ot} = H_t$$
$$B_{ot} = \mu_0 H_{ot} = \mu_0 H_t = \frac{1}{\mu_r} B_t = \frac{1}{\mu_r} B\sin\theta$$

Størrelsen på magnetfeltet like utenfor kuleoverflata

$$B_o = \sqrt{B_{on}^2 + B_{ot}^2} = B\sqrt{\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\mu_r^2}}$$
$$= 0{,}05\,T\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 3}\right)^2} = 0{,}05\,T\sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{12}} = \frac{0{,}05\,T}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{0{,}029\,T}}$$

Oppgave 4.



Spenning over kapasitansen: $V_c = \frac{1}{C} Q$

Spenning over motstanden: $V_R = RI = R\frac{dQ}{dt}$

Differensiallikningen for Q blir

$$V_R + V_c = V(t)$$
$$\underline{R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 e^{-\sigma t}}$$

Med $Q = Ke^{-\alpha t} + Ae^{-\sigma t}$ finner en

6

$$\dot{Q} = -\alpha K e^{-\alpha t} - \sigma A e^{-\sigma t}$$

som ved innsetting gir

$$\left(-R\alpha K + \tfrac{1}{C}K\right)e^{-\alpha t} + \left(-R\sigma A + \tfrac{1}{C}A\right)e^{-\sigma t} = V_0 e^{-\sigma t}$$

Da likningen gjelder for vilkårlig tid t må en ha

$$-R\alpha K + \tfrac{1}{C}K = 0$$
$$\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{RC}}}$$
$$\left(-R\sigma + \tfrac{1}{C}\right)A = V_0$$
$$A = \underline{\underline{\frac{V_0 C}{1 - RC\sigma}}} = \frac{VC}{1 - \sigma/\alpha}$$

Størrelsen K bestemmes av begynnelsesverdien

$$0 = Q(0) = K + A$$
$$K = \underline{\underline{-A}} = \frac{VC}{1 - RC\sigma}$$