

Forslag til løsning.

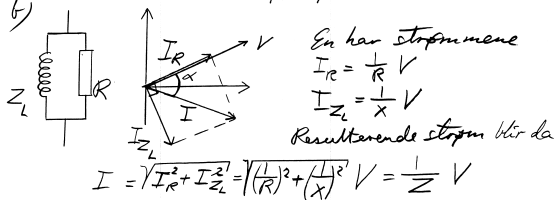
①

Oppgave 1.

a) Vinkelhøyden er $w = 2\pi f = 2\pi \cdot 34005 = 214 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$

Med dette finner en:

Motstanden:	$Z = R = \frac{80 \Omega}{1.52}$	Fasevinkel	$\alpha = 0$
Induktansen:	$Z = \omega L = 214 \cdot 10^4 \cdot 0.95 \cdot 10^{-3} = 20.33 \Omega$		$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$
Kapasitansen:	$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{214 \cdot 10^4 \cdot 0.24 \cdot 10^{-9}} = 19.5 \Omega$		$\alpha = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$



c) Impedansen blir følgende

$$Z = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2} \right)^{-1/2} = \frac{RX}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{30 \cdot 40 \Omega}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 24 \Omega$$

Fasevinkel: $\tan \alpha = \frac{I_L}{I_R} = \frac{1/X}{1/R} = \frac{R}{X} = \frac{3}{4} = 0.75$
 $\alpha = 36.9^\circ$

Alternativt med komplekse tall:

Parallellkopling: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} \Rightarrow Z = \frac{R Z_L}{R + Z_L} =$

$\frac{R \cdot X}{R + iX} = \frac{RX}{X - iR} = |Z| e^{i\alpha}$, der $|Z| = \frac{RX}{(R^2 + X^2)^{1/2}}$, $\tan \alpha = \frac{R}{X}$.

③ $\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(a-z + \sqrt{a^2 + (a-z)^2}) - \ln(-z + \sqrt{a^2 + z^2})]$

når en setter $u = z - z$, $du = dz$. (Ved å sette $u = z - z$ eller benytte det andre svar på oppgitte integralet finner det alternative svaret direkte. Likheten av de 2 uttrykkene ses enkelt ved at $(\sqrt{a^2 + u^2} + u)(\sqrt{a^2 + u^2} - u) = a^2$)

De øvrige konstantene blir altså:

$$K = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}, \quad C_1 = a \quad \text{og} \quad C_2 = 0$$

c) For $z > a$ må en benytte det andre uttrykket for $V(z, \rho)$ for å unngå $\ln(0) - \ln(0)$ når $\rho = 0$.

En finner

$$V(z, 0) = K [-\ln 2(z-a) + \ln(2z)] = K [\ln z - \ln(z-a)]$$

Det elektriske feltet for $z > a$ ($\rho = 0$) blir dermed

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = K \left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-a} \right) = K \frac{a}{z(z-a)}$$

Oppgave 2.

②

a) For store avstander z vil ladningen på tråden bli som en punktladning med tilhørende potensial. Med lengde a blir ladningen på tråden

$$Q = \lambda a$$

slik at for store avstander $r \rightarrow \infty$ blir potensialet

$$V(z, \rho) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

c) For store avstander blir det elektriske feltet også som for punktladning ($\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) Et trådstykke med lengde dz har ladning $dq = \lambda dz$. Med posisjon $z = z_0$ er avstanden til punktet (z, ρ)

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$$

c) Bidraget til potensialet fra ladningen dq blir derfor

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

Det resulterende potensialet blir

$$V = V(z, \rho) = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{a-z}^a \frac{dz_0}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}} =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-z}^a \frac{du}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln[u + \sqrt{\rho^2 + u^2}] \right] =$$

Oppgave 3.

a) Den magnetiske fluksen gjennom røret er gitt ved (N=1)

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = BAN = B \frac{\pi}{4} d^2 = \mu_0 n I \frac{\pi}{4} d^2 = MI,$$

Den gjensidige induktansen blir følgende

$$M = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 \pi d^2}{4} \frac{N^2}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{\pi}{4} (0.01 \text{ m})^2 \cdot \frac{300}{0.25 \text{ m}}$$

$$= 118 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1.18 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

Magnetfelt generert av strøm i røret

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{I}{L}$$

Tilhørende fluks ($N=1$)

$$\Phi = BAN = \mu_0 \frac{\pi}{4} d^2 I = LI$$

Selvinduktansen blir

$$L = \mu_0 \frac{\pi}{4} d^2 \frac{1}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot \frac{\pi}{4} (0.01 \text{ m})^2 \cdot \frac{1}{0.1 \text{ m}} = 0.987 \cdot 10^{-9} \text{ H} (\approx 10^{-9} \text{ H})$$

b) Magnetfeltet ligger parallelt med jerntråden og de kan en benytte grensebetingelsen $H_{1t} = H_{2t}$ for tangensialkomponenten. Her så

$$\text{I luft: } B = \mu_0 H_{1t} = \mu_0 H$$

$$\text{I jern: } B = \mu_r \mu_0 H_{2t} = \mu_r \mu_0 H$$

(3)

Følgelig: $B_s = \mu_r B$ Areal av jerntråden er: $A_s = \frac{\pi}{4} d_s^2$ Restende areal i røret: $A_r = A - A_s = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_s^2)$

Fluks ned jerntråd i røret:

$$\Phi_{s2} = B A_r + B_s A_s = B(A - A_s) + \mu_r B A_s$$

$$= B A + (\mu_r - 1) A_s B = (1 + (\mu_r - 1) \frac{A_s}{A}) B$$

$$= (1 + (\mu_r - 1) (\frac{d_s^2}{d^2})) \Phi_2$$

Gjensidig induktans blir følgelig

$$M_s = (1 + (\mu_r - 1) (\frac{d_s^2}{d^2})) M$$

Tilsvarende blir nå selvinduktansen

$$L_s = (1 + (\mu_r - 1) (\frac{d_s^2}{d^2})) L$$

∴ Som strømkrets blir røret en motstand med lengde $s = \pi d$ (omkretsen av røret) og bredde l . Tverrsnittet av ledere er $A = bl$ slik at motstanden blir

$$R = \rho \frac{s}{A} = \rho \frac{\pi d}{bl} = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m} \frac{\pi \cdot 0,01 \text{ m}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m}} = 1,07 \cdot 10^{-5} \Omega$$

(4)

d/Fluxen i røret er som funnet foran:

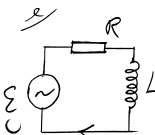
$$\Phi_m = \Phi_{m2} = \mu_0 \mu_r \frac{\pi}{4} d^2 I_1 = M I_1 = M I_{01} \sin \omega t$$

Indusert elektromotorisk spenning

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \omega M I_{01} \cos \omega t$$

På grunn av symmetrien er det elektriske feltet konstant rundt røret (og tangensielt til dette). Følgelig har en $\mathcal{E} = \oint \vec{E} d\vec{s} = E \cdot \pi d$ og dermed

$$E = \frac{\mathcal{E}}{\pi d} (= \frac{-\omega \mu_0 \frac{\pi}{4} d^2 \frac{N}{L} I_{01} \cos \omega t}{\pi d} = -\frac{1}{4} \omega \mu_0 d \frac{N}{L} I_{01} \cos \omega t)$$

Spenning over motstanden: $V_R = RI$ Spenning over spolen: $V_L = L \frac{dI}{dt}$ Spenning rundt kretsen: $V_R + V_L = \mathcal{E}$

Den resulterende differensiallikningen blir følgelig

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}$$