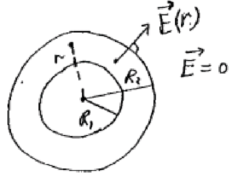
Eksamen i fag SIF4012
Fysikk 2, 20/5 – 98.

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a)



Ladning innenfor radius $R<R_1$ er gitt ved

$$Q = Q(R) = \int_{r<R} \rho\, dV = \int_0^R \rho_0 \left(\frac{r}{R_1}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{R_1^2}\Big|_0^R \frac{1}{5} r^5 = \frac{4\pi\rho_0}{5R_1^2} R^5$$

Så med $R=R_1$

$$Q_1 = Q(R_1) = \frac{4\pi}{5}\rho_0 R_1^3$$

b) For å beregne σ og $E(r)$ benyttes Gauss lov ($\varepsilon_r = 1$)

$$\oint \vec{D}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 \int \vec{E}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = Q(r)$$

$$E = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

der $Q(r)$ er ladning innenfor radien r. Med $E=0$ for $r>R_2$ må følgelig også $Q(r)=0$ for $r>R_2$.

Dvs: $0 = Q(r) = Q(R_1) + A\sigma = Q_1 + 4\pi R_2^2 \sigma$

$$\sigma = -\frac{Q_1}{4\pi R_2^2}$$

For $r<R_1$ har en så fra punkt a): $Q(r) = Q_1 \frac{Q(r)}{Q_1} = Q_1\left(\frac{r}{R_1}\right)^5$

Så det elektriske feltet blir:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\dfrac{r}{R_1}\right)^3 & r<R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1<r<R_2 \end{cases}$$

Med dielektrisk medium mellom radiene R_1 og R_2 vil E bli uendret for $r<R_1$, mens for $R_1<r<R_2$ må en dividere med ε_r slik at nå blir

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2} \qquad R_1<r<R_2$$

(Dette følger da også fra Gauss lov som med gitt $Q(r)$ gir uendret $\vec{D}(r)$ mens $\vec{E} = \vec{D}/(\varepsilon_r\varepsilon_0)$.)

c) For å beregne den elektrostatiske energien kan en benytte energitettheten $u = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ ($\varepsilon_r = 1$).
Med den funne E finner en da

$$U = \int u\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^{R_1} \left[\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^3\right]^2 4\pi r^2 dr$$

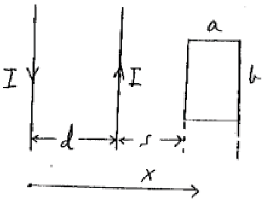
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left[\Big|_0^{R_1} \frac{1}{9}\frac{r^9}{R_1^{10}}\right.$$

$$\left. + \Big|_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{1}{r}\right)\right] = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{10}{9}\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

[Alternativt kunne en benytte $U = \frac{1}{2}\int V\rho\, 4\pi r^2 dr$ der $V=V(r)$ ($\vec{E} = -\nabla V$) er det elektriske potensialet.]

Oppgave 2.

a)



Potensialforskjellen mellom de 2 lederne vil være

$$\Delta V = V(d-R) - V(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{d-R}{R} - \ln\frac{d}{d-R}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right) \quad \left(\approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d}{R}\right)\right)$$

Ladning på stykke av lengde l

$$Q = \lambda l$$

Kapasitansen blir følgelig ($d \gg R$)

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R}\right)} \approx \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln(d/R)}$$

b) Magnetfeltet mellom lederne (rettet opp av papirplanet og vinkelrett dette) finnes ved å addere feltene fra hver av lederne. Med det gitte uttrykket har en da

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

Magnetisk fluks gjennom sløyfe av lengde l blir følgelig

$$\Phi_m = \int \vec{B}\, d\vec{A} = l\int_R^{d-R} B\, dx = l\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_R^{d-R}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx$$

$$= \frac{l\mu_0 I}{2\pi}\Big|_R^{d-R}\left[\ln x - \ln(d-x)\right] = \frac{l\mu_0 I}{2\pi} 2\left(\ln(d-R) - \ln R\right)$$

$$= \frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-R}{R} \approx \frac{l\mu_0 I}{\pi}\ln(d/R)$$

Selvinduktansen av sløyfen (ledningsstykket) blir følgelig

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \approx \frac{l\mu_0}{\pi}\ln(d/R)$$

[Merk at $(L/l)(C/l) = \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$ der c er lyshastigheten. c er da også forplantningshastigheten til elektriske signaler (bølger) langs ledningsparet.]

c) Magnetfeltet i den rektangulære strømsløyfen blir som funnet under punkt b) men med $d+s<x<d+s+a$. Med sløyfe av lengde b blir nå fluksen gjennom denne

$$\Phi_m = \int \vec{B}\, d\vec{A} = b\int_{d+s}^{d+s+a} B\, dx = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\Big|_{d+s}^{d+s+a}\left[\ln x - \ln(d-x)\right]$$

$$= \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{d+s+a}{d+s}\right) - \ln\frac{s+a}{s}\right] = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}$$

Har så

$$\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 \sin\omega t$$

Indusert elektromotorisk kraft blir dermed

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{b\mu_0\omega I_0}{2\pi}\sin\omega t \ln\frac{(d+s+a)s}{(d+s)(s+a)}$$

Oppgave 3

a) Sammenhengene er gitt ved

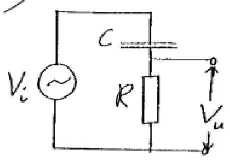
Motstand: $V = \underline{RI}$

Induktans: $V = \underline{R\frac{dI}{dt}}$

Kapasitans: $V = \frac{Q}{C}$ eller $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \underline{\frac{1}{C} I}$

(evt. $CV = \int I dt$).

b)



Spenningen over motstanden er

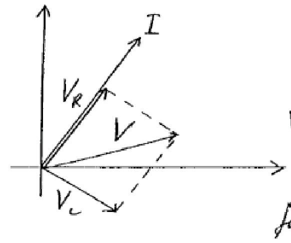
$V_R = V_u = RI$

mens den over kapasitansen er

$V_C = \frac{1}{\omega C} I$

der strømmen er faseforskjøvet 90° foran spenningen V_C.

$$\left[I = C\frac{dV_C}{dt} = CV_{0C}\frac{d}{dt}(\cos(\omega t+\alpha_C)) = -CV_{0C}\,\omega\sin(\omega t+\alpha_C) = \omega C V_{0C}\cos(\omega t+\alpha_C+\tfrac{\pi}{2}).\right]$$



Med viserdiagram finner en:

Størrelsen på spenningen inn blir

$V_i = V = \sqrt{V_R^2+V_C^2} = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\, I$

Med $V_u = V_R = RI$

finner en følgelig forholdet

$$F = \frac{V_u}{V_i} = \frac{RI}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\, I} = \underline{\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

Alternativt når en ved bruk av komplekse tall:

Impedans i seriekoplet krets: $Z = R + \frac{1}{i\omega C}$

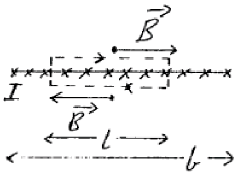
Med $V_i = ZI$ og $V_R = RI$ blir da

$V_u/V_i = R/Z$

slik at

$$F = \left|\frac{V_u}{V_i}\right| = \frac{R}{|Z|} = \underline{\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}$$

c)



P.g.a. symmetrien vil magnetfeltet være like stort over og under båndet, men motsatt rettet. Når båndet kan en se bort fra randeffekter. Bruk av Ampères lov gir dermed

$\oint \vec{B}\, ds = 2lB = \mu_0 I_i$

$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_i}{l} = \underline{\frac{\mu_0 I}{2b}}$

der $I_i = \frac{I}{b} \cdot l$

er strømmen innenfor integrasjonssløyfen.