Forslag til løsning

Oppgave 1

a) Sammenhengen mellom overflateladning σ og elektrisk felt er

$$\sigma = \varepsilon_0 E$$

Videre har en så $\sigma = Q/A$ og $E = V/d$ der Q er ladningen på platene og V er spenningen mellom disse. Av dette finner en så

$$\frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \frac{V}{d}$$

slik at kapasitansen blir

$$C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

b) Det elektriske feltet mellom platene er summen av feltene fra hver av platene. Hver plate gir like store bidrag da begge har ladning av samme størrelse men motsatt fortegn. (På yttersiden av de 2 platene er da også resulterende felt lik 0.) Feltet fra hver plate har følgelig størrelse $E_p = \frac{1}{2}E$. Den tilhørende kraften på den motsatte platen blir følgelig

$$F = Q E_p = \frac{1}{2} Q E = \frac{1}{2}\sigma A E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A E^2$$

$$E = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0 A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}11 \, \mathrm{VAs/m}}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \, 6{,}2 \cdot 10^{-2} \, \mathrm{m}^2}} = \underline{\underline{6{,}3 \cdot 10^5 \, \mathrm{V/m}}}$$

[Dette kan også bestemmes ved energibetraktninger. Kondensatorens energi er $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 A/d)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A E^2 d$. Arbeidet for å separere platene blir $W = Fd$ slik at $U = W$ gir $F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 A E^2$.]

c) Energien til kondensatoren er $U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}Q^2/C$. Når platene forskyves vil denne energien U endres. Med Q konstant må denne endringen tilsvare arbeidet som gjøres ved forskyvningen. Den varierende kapasitansen er nå

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{xb}{d}$$

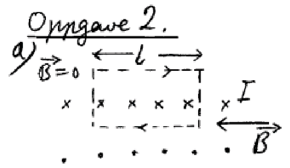
Kraften kan nå bestemmes fra den potensielle energien og blir følgelig

$$K = \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 b x}\right)\right| = \frac{dQ^2}{2\varepsilon_0 b x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\varepsilon_0 b x}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 b}{d}(CV)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d} V^2}}$$

Oppgave 2.

a)



Utenfor spolen vil magnetfeltet være lik 0 mens det innenfor vil være homogent og rettet langs spolen. Bruk av Ampères lov ved integrering langs en lukket kurve som vist på figuren gir dermed

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \oint \vec{H}\, d\vec{s} = \mu_0 I_{tot}$$

$$Bl = \mu_0 I_{tot} = \mu_0 I n l$$

$$B = \underline{\mu_0 n I}$$

($N = nl$ er antall vindinger innenfor integrasjonssløyfen slik at $I_{tot} = IN$ er total strøm innenfor.)

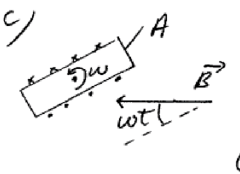
b) For å bestemme L trenger vi den magnetiske fluksen innenfor spolen med gitt strøm I. Ved å bruke resultatet fra a) og multiplisere med antall vindinger $N = nh$ får en for den totale fluksen gjennom spolevindingene

$$\phi_m = N \oint \vec{B}\, d\vec{A} = NBA = nh\, \mu_0 n I A$$

Selvinduktansen blir følgelig:

$$L = \frac{\phi_m}{I} = \underline{\underline{\mu_0 n^2 h A}}$$

c)



Fluksen gjennom hver vinding blir

$$\phi_1 = \oint \vec{B}\, d\vec{A} = BA \cos \omega t$$

slik at total fluks blir

$$\phi_m = \phi_1 = N\phi_1 = nhBA \cos \omega t$$

Indusert elektromotorisk spenning blir følgelig

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \omega nh BA \sin \omega t$$

med maksimalverdi

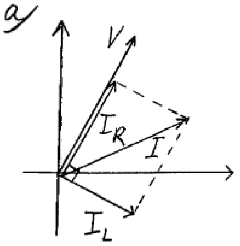
$$\mathcal{E}_m = \underline{nhA\omega B} =$$

$$3 \cdot 10^3 \, \mathrm{m}^{-1} \cdot 0{,}1 \, \mathrm{m} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} \, \mathrm{m}^2 \cdot 600 \, \mathrm{s}^{-1} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \, \mathrm{T} = \underline{\underline{1{,}35 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{V}}}$$

$$= \underline{\underline{1{,}35 \, \mathrm{mV}}}$$

Oppgave 3.

a)



Strømmen gjennom motstanden er $I_R = \frac{1}{R}V$

mens den gjennom induktansen er $I_L = \frac{1}{\omega L}V$

der spenningen er faseforskjøvet 90° foran strømmen. Fra viserdiagrammet finner en dermed størrelsen på strømmen

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}\,V$$

$$F = I/V = \underline{\underline{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}}$$

[Alternativt ved bruk av komplekse tall:

Parallellkopling av impedans: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}$
$= \frac{1}{R} + i\left(-\frac{1}{\omega L}\right)$

Med $V = ZI$ blir dermed

$$F = \frac{I}{V} = \frac{1}{Z} \Rightarrow |F| = \left|\frac{1}{Z}\right| = \underline{\underline{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}}} \quad]$$

b) Det elektriske feltet vil være rettet radielt og gitt ved gradienten av potensialet ($\vec{E} = -\nabla V$). Så en finner ($\vec{E} = E\hat{e}_r$)

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\varphi}{12\pi\varepsilon_0 R}\frac{d}{dr}\left(4 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right) = \underline{\underline{\frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^4}}}$$

c) Benytter her Gauss lov der Gaussflaten er en kuleflate om sentrum med radius r. En finner da først

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}\, d\vec{A} = q_{in}$$

$$\varepsilon_0 E \cdot 4\pi r^2 = q(r)$$

der $q(r)$ er ladning innenfor radius r (dvs. $q(R) = \varphi$). Med resultatet fra punkt b) finner en så

$$q(r) = 4\pi\varepsilon_0 r^2 \cdot \frac{\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^4} = \varphi\left(\frac{r}{R}\right)^4$$

Ladning i et kuleskall av tykkelse dr som har volum $dV = 4\pi r^2 dr$ blir nå

$$dq = q(r+dr) - q(r) = q(r) + \frac{dq}{dr}dr - q(r)$$
$$= 4\varphi\frac{r^3}{R^4}dr$$

Tettheten av ladning blir følgelig:

$$\rho(r) = \frac{dq}{dV} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dq}{dr} = \underline{\underline{\varphi\frac{r}{\pi R^4}}}$$