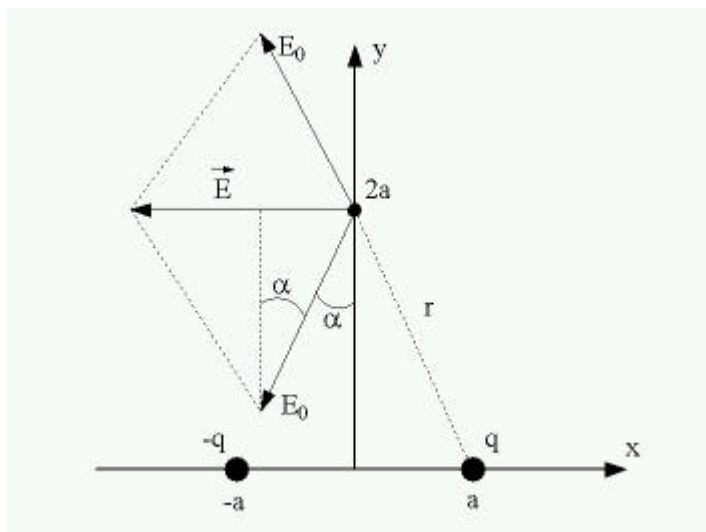


Løsning øving 1

Oppgave 1



Det elektriske feltet fra hver ladning er:

$$E_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{20\pi\epsilon_0 a^2}$$

da

$$r = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

Av symmetri grunner er det klart at y-komponenten E_y til det resulterende feltet forsvinner ($E_y = 0$). De to ladningene bidrar med like store x-komponenter:

$$E_{0x} = -E_0 \sin \alpha = -E_0 \frac{a}{\sqrt{5}a} = -\frac{1}{\sqrt{5}} E_0$$

Dermed: $\vec{E} = 2E_{0x} \hat{x} = -\frac{q}{10\sqrt{5}\pi\epsilon_0 a^2} \hat{x}$

Med $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C og $a = 2\text{\AA} = 2 \cdot 10^{-10}$ m blir tallverdien på det elektriske feltet

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{5\sqrt{5}a^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{5\sqrt{5} \cdot (2 \cdot 10^{-10})^2} = \underline{6.4 \cdot 10^9 \text{ N/C}}$$

Oppgave 2

- a) Kloridionet har ladning $-e$ og masse $35m_p$, der $e=1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ er elementærladningen og $m_p=1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$ er protonmassen (som er omtrent like stor som nøytronmassen). Tyngdekraften er lik den elektriske kraften når

$$mg = eE$$

Det gir den elektriske feltstyrken

$$E = \frac{mg}{e} = \frac{35 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot 9.8 \text{m/s}^2}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}} = \underline{3.6 \cdot 10^{-6} \text{N/C}}$$

Til sammenligning er "vanlige" elektriske felt ved jordoverflata av størrelsesorden 100N/C .

- b) Man oppnår et tilsvarende stort elektrisk felt fra et kloridion,

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

når avstanden er:

$$r = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E}} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{3.6 \cdot 10^{-6}} \right)^{\frac{1}{2}} \text{m} = \underline{0.02 \text{m} = 2 \text{cm}}$$

Oppgave 3

- a) Vi deler skiva opp i ringer med bredde dR . Alle punkter på ringen ligger i samme avstand r fra punktet på z -aksen (se figur neste side). Diametralt motsatte punkter (evt arealer dA) fører til at x - og y -komponentene til feltet forsvinner. z -komponenten blir

$$dE_z = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

Da r er konstant rundt hele ringen, kan en la dQ gjelde for hele ringen slik at

$$dQ = s \int dA = sRdR \int_0^{2\pi} dj = 2\pi sRdR.$$

Dermed blir feltet fra hele skiva:

$$E_z = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2\pi sRdR}{(a^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{sa}{2\epsilon_0} \left| \frac{-1}{(a^2 + R^2)^{1/2}} \right|_0^{R_0} = \frac{s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{(a^2 + R_0^2)^{1/2}} \right)$$

der

$$\cos q = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

er brukt. En kunne også ha satt

$$dQ = s dA = s R d\varphi dR$$

og fått dobbeltintegralet

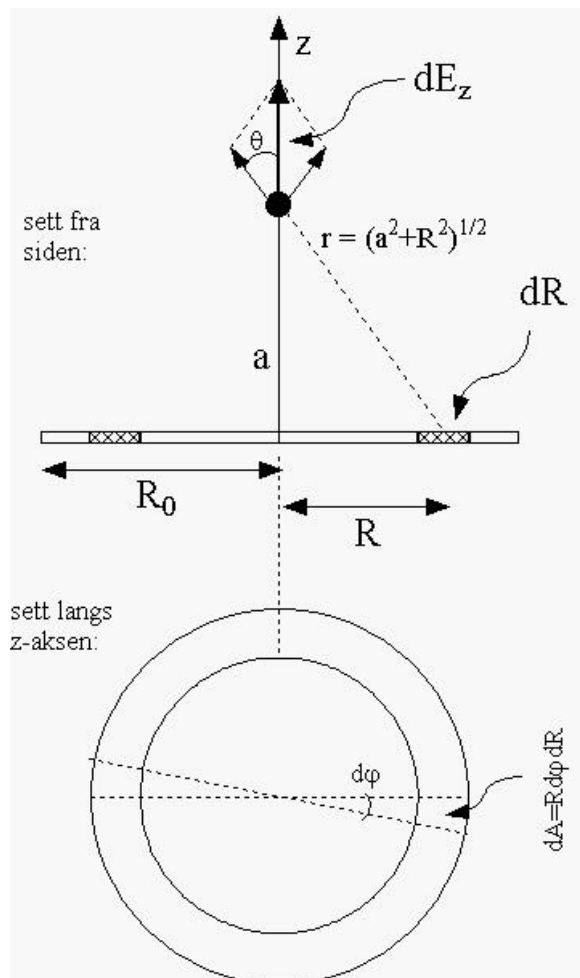
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0} (\dots) s R dR.$$

Alternativt kunne vinkelen q ha blitt benyttet som integrasjonsvariabel:

$$\tan q = \frac{R}{a} \Rightarrow d(\tan q) = \frac{dq}{\cos^2 q} = \frac{dR}{a}; r = \frac{a}{\cos q}$$

$$\int_0^{R_0} \frac{R dR}{r^2} \cos q = \int_0^{q_0} \left(\frac{\cos q}{a} \right)^2 a \tan q \frac{adq}{\cos^2 q} \cos q =$$

$$\int_0^{q_0} \sin q dq = 1 - \cos q_0 = 1 - \frac{a}{r_0} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_0^2}}$$



b) Når $R_0 \gg a$, betyr det at plata er stor i forhold til avstanden fra plata til punktet som betraktes. Det siste leddet kan da neglisjeres ($a/R_0 \rightarrow 0$), og vi finner

$$E_z = \frac{s}{2\epsilon_0}$$

Vi skal i forelesningene snart se at dette nettopp er feltet utenfor et uendelig stort uniformt ladet plan. Når $a \gg R_0$, vil plata bli som et punkt langt borte. Da vil

$$\sqrt{a^2 + R_0^2} \rightarrow a$$

og vi må derfor rekkeutvikle for å få et ikke-forsvinnende bidrag til E_z . Med

$$x = \left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \rightarrow 0$$

finner en, med utvikling i Taylorrekke:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$$

eventuelt

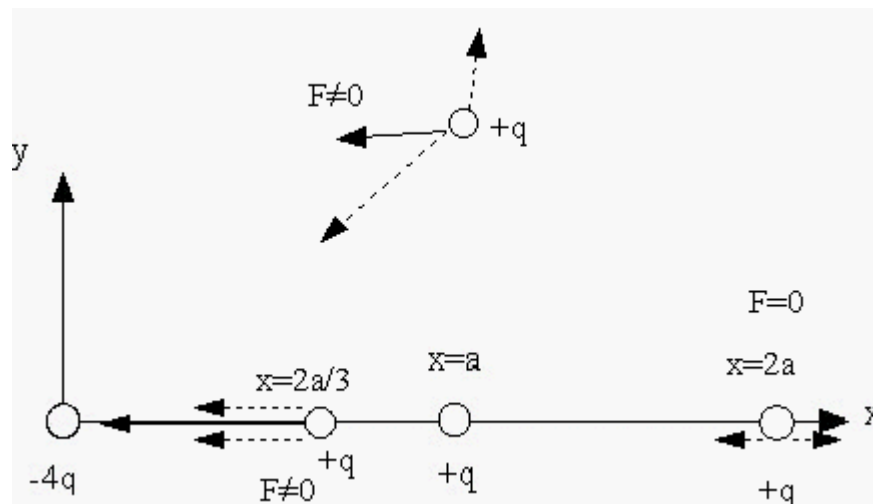
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots; \frac{1}{1 + \frac{1}{2}x + \dots} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots$$

slik at feltet blir:

$$E_z = \frac{s}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = \frac{s}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}x + \dots\right)\right) = \frac{sR_0^2}{4\epsilon_0 a^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

som er feltet fra en punktladning $Q = sA$, der $A = \pi R_0^2$ er arealet av sirkelskiven.

Oppgave 4



Punktladningen er i likevekt (dvs kan ligge i ro) dersom kraften på den er lik null. De to kreftene, hhv fra ladningen $-4q$ i $x=0$ og fra ladningen $+q$ i $x=a$, kan bare kansellere dersom de har eksakt motsatt retning. Det kan de ikke ha dersom den tredje ladningen $+q$ er plassert utenfor x -aksen, f.eks. som øverst på figuren. (Enkeltkomponenter av kraften med stiplede piler, totalkraften med heltrukken pil.) Altså må ladningen $+q$ ligge på x -aksen for å kunne være i likevekt.

Videre, ettersom tiltrekningskraften mellom to ladninger $-4q$ og $+q$ er sterkere enn frastøtningen mellom $+q$ og $+q$ for en bestemt avstand mellom ladningene, er det klart at ladningen $+q$ må ligge et sted til høyre for $x=a$ for å være i likevekt. I tillegg kan selvsagt partikkelen bindes i det singulære punktet $x=0$.

Null kraft på x -aksen i punktet x_0 medfører dermed (når en også tar hensyn til kraftens retning):

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(-\frac{4}{x_0^2} \frac{x_0}{|x_0|} + \frac{1}{(x_0 - a)^2} \frac{x_0 - a}{|x_0 - a|} \right) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \\
 &\Rightarrow 4(x_0 - a)^2 = x_0^2 \\
 &\Rightarrow 3x_0^2 - 8ax_0 + 4a^2 = 0 \\
 &\Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}(4 \pm \sqrt{4^2 - 3 \cdot 4})a = \frac{1}{3}(4 \pm 2)a = \underline{2a}
 \end{aligned}$$

Vi har her forutsatt at $x_0 > a$, slik at $x_0=2a/3$ ikke er en aktuell løsning. Vi ser da også av figuren at begge kraftkomponentene virker mot venstre på en ladning $+q$ plassert her.

Posisjonen $x_0=2a$ er stabil mhp en forflytning langs x -aksen, da den frastøtende kraften fra $+q$ i $x=a$ vil avta raskere enn den tiltrekkende kraften fra $-4q$ i $x=0$ for en positiv forflytning Δx , og øke raskere for en negativ forflytning. (En kan sjekke dette matematisk ved å derivere uttrykket for nettokraften mhp x_0 .)

Ved en forflytning i y -retningen, derimot, vil denne likevekten være ustabil. (Vis dette ved å beregne y -komponenten av de to kreftene som virker på den tredje ladningen når den er plassert i $(x,y) = (2a, \Delta y)$!)